NAPOLI

Ueber

die allgemeine und volle Gültigkeit

mathematiſcher Formeln.

Ein Beitrag

zur

Deutung des Negativen und Imaginären.

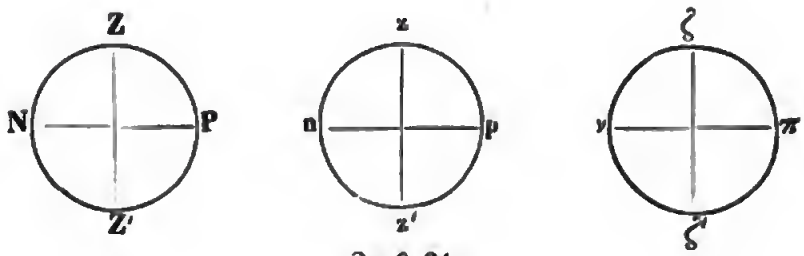
Von

J. W. F. Gronau,

Oberlehrer an der St. Johannisſchule in Danzig.

BIBLIOTECA PROVINCIALE NAPOLI

Erſter Theil.



Zu § 31.

Danzig.

In Commiſſion bei B. Kabus.

1857.

Digitized by Google

§ 1.

Wer von dem, was die Mathematiker seit ein Paar Tausend Jahren geleistet haben, auch nur eine Ahnung hat, erstaunt mit Recht über die Größe, Schönheit und Festigkeit ihres Lehrgebäudes. Keine andere irdische Wissenschaft kann sich einer solchen Vollendung rühmen, wie wir sie in der Mathematik antreffen, weshalb auch außerhalb derselben Stehende den Ausspruch der Begeisterung eines Plato: ὁ θεὸς ἀεὶ γεωμέτρει, und eines Gauß: ὁ θεὸς ἀριθμητίζει nicht ganz ungünstig aufzunehmen pflegen. Um so auffallender aber sind auch, namentlich für Nichtmathematiker, vier Flecken, welche sich im Laufe der Jahrhunderte an diesem erhabenen Gebäude gezeigt haben. Sie betreffen die Theorie des Negativen, des Imaginären, der Parallellinien und des Unendlichen. Das Alterthum wußte bei der Beschränkung, die es sich auflegte, über alle in den vier genannten Theorien steckenden Schwierigkeiten hinwegzukommen, die drei letzt-abgelaufenen Jahrhunderte deckten diese Schwierigkeiten auf, aber das jetzige Jahrhundert ist bis heute noch die Lösung schuldig geblieben. Da giebt es Mathematiker, welche, um in das klassische Zeitalter zurückzukehren, das Negative läugnen, das Imaginäre für Unsinn erklären und das Unendliche durch die Grenzmethode beseitigen wollen. Andere verschmähen die in Frage gestellten Theorien ihres offenbaren Nutzens wegen nicht, aber sie bedienen sich ihrer, wie man sich einer Maschine bedient, ohne ihre Einrichtung zu kennen. Diejenigen sind bis jetzt noch zu zählen, welche eine Lösung der obwaltenden Schwierigkeiten angestrebt haben. Ihnen will ich mich beigesellen, und obgleich ich fühle, daß nur derjenige das große Räthsel vollständig lösen kann, welcher es im Ganzen in Angriff nimmt, so will ich wenigstens für diesmal mich nur bemühen, einen Beitrag zur Deutung des Negativen und Imaginären, wie es sich bei der Behandlung von Gleichungen des zweiten und dritten Grades zeigt, zu liefern.

§ 2.

Aber auch bei dieser Beschränkung ist die Aufgabe, welche ich mir gestellt habe, noch groß, denn daß hier eigenthümliche Schwierigkeiten obwalten müssen, wird man am besten aus Folgendem erkennen. Nach Chasles (Geschichte der Geometrie pag. 565) scheinen die Inder zuerst von der negativen Quadratwurzel, welche sich bei Auflösung einer quadratischen Gleichung zeigt, in den Fällen Gebrauch gemacht zu haben, wenn die quadratische Gleichung zwei positive Wurzeln hat. Aber Dio-

phantus (um 350 nach Chr.), obgleich er nach Neſſelmann (die Algebra der Griechen pag. 288) die Regel: λεῖψις ἐπὶ λεῖψιν πολλαπλασιασθεῖσα ποιεῖ ὕπαρξιν· λεῖψις δὲ ἐπὶ ὕπαρξιν ποιεῖ λεῖψιν nicht nur kannte, ſondern auch bei ſeinen Zeitgenoſſen als bekannt vorausſetzen durfte, wandte dieſe negative Quadratwurzel niemals an. Der Araber Muhammed ben Muſa († 833) behält ſich die Entſcheidung vor, bei ſolch einer Gleichung nach Umſtänden die poſitive oder negative Quadratwurzel zu verwerfen. Erſt im ſechszehnten Jahrhundert hielten es Cardanus und Stiefel der Mühe werth, die negative Wurzel einer quadratiſchen Gleichung ihrer ſelbſt wegen in Betrachtung zu ziehen. Aber Vieta, dem die Wiſſenſchaft ſo viel verdankt, verließ dieſen Weg wieder, er ſah die Vieldeutigkeit als ein den Gleichungen innewohnendes Leiden, das in ihnen ſteckende Negative als einen Fehler an, und ſuchte ſie daher, bevor er ſich an ihre Auflöſung machte, ſo zu verbeſſern, daß ſie ihm auf ſeine Fragen nur poſitive Antworten geben konnten. Doch hören wir ihn ſelber. Seine Schrift, welche Anderſon mit dem Motto herausgab: Quibus nihil in hoc genere simile aut secundum, huic aevo hactenus visum, führt den Titel: De aequationum recognitione et emendatione, Parisiis 1614. Darin heißt es: Praeparatione enim indigent aequationes saepenumero, antequam foeliciter explicentur . . At obest πολυπάθεια, et quò elatior est potestas, affectionisque gradus, eo major se prodit in explicando problemate ἄρρησις ἢ ἀλογία. Ecquid vero aequationis quae proposita est, agnitâ constitutione non tentabit Analysta, quò saxa et scopulos refugiat? num guarus Anatomices invertet, deprimet, attollet, et undique operabitur secure? . . Sed non desunt Analystae singularia et topica remedia adversus vitia quaedam aequationum . . . Omnino adversus πολυπάθειαν tutissimum ac paratissimum remedium est, expurgatio per uncias. . . . De transmutatione, quae remedium est adversus vitium negationis etc.

Kaum war indeſſen Vieta vom Schauplatz getreten, als der Niederländer Albert Girard 1629 über die Natur der negativen Wurzeln ſehr richtige Anſichten entwickelte, aber ſeine Gründe gelangten wohl nicht zu Harriot, oder fanden kein Gehör, denn Harriot hält 1631 jede Gleichung für unmöglich, welche keine poſitive Wurzel hat. Erſt ſeit Carteſius († 1650) durch ſeine Geometrie die negativen Wurzeln dargeſtellt hatte, konnten ſie wenigſtens nicht wieder verdrängt werden, denn als Carnot († 1823) wieder mit der Behauptung auftrat: daß die negativen Wurzeln keine wahren Auflöſungen ſeien, daß ſie mitunter ganz ohne Bedeutung ſeien, daß ſie nichts wie bloße algebraiſche Formen ſeien, die durch gewiſſe Umformungen in die Rechnung gebracht werden, ja als er auch ſogar es für unmöglich erklärte, auf genugthuende Art zu beweiſen, daß $-a \times -a = a^2$ iſt; da fehlte es nicht an ſolchen die ihn ſofort zu widerlegen ſuchten und auch theilweiſe mit Erfolg widerlegten, wie z. B. Profeſſor Förſtemann in Danzig. (Ueber den Gegenſatz poſitiver und negativer Größen 1817.) „Es war, ſagt Arneth in ſeiner Geſchichte der reinen Mathematik (pag. 239), dies einer der Gegenſtände, vor welchen die Menſchen wiederholt ſtehen blieben, die ſtückweiſe erfunden und wieder verlaſſen und endlich nur mit Mühe erkannt und feſtgehalten wurden."

§ 3.

Noch übler erging es den imaginären Wurzeln. Obgleich man ſeit Cardanus ſie bemerkt und mit ihnen Rechnungen angeſtellt hat, obgleich der Nutzen der imaginären Größen nicht verkannt wird und Gauß auf ihre geometriſche Darſtellbarkeit hingewieſen hat, iſt ihre Exiſtenz bis auf den

Digitized by Google

heutigen Tag bedroht. Ich will nicht von denen reden, welche sie für offenbaren Unsinn erklären und deshalb aus der Wissenschaft entfernt haben wollen, ich spreche von denen, welche ihre Erscheinung in der Analysis als nothwendig und vollkommen gerechtfertigt halten; auch sie hielten dieselben bis vor etwa zwanzig Jahren meistens für nicht wirklich, für inhaltsleere Zeichen, für bloße Gedankendinge, für ein Symbol, dem aber nichts zum Grunde liege, wohinter nichts stecke. Hören wir z. B. Montücla (Histoire des Mathématiques III. pag. 27): Il est suffisamment connu du plus médiocre algébriste qu' une expression radicale d'un degré pair, qui renferme sous le signe radical une quantité négative, est inexplicable et impossible. . . . Ainsi toutes les fois que la résolution d'un problême conduit à de semblables expressions, et que parmi les différentes valeurs de l'inconnue il n'y en a que de telles, le problême est impossible ou ne présente qu' une demande absurde. C'est là de l'algèbre la plus élémentaire.

Carnot, (Géométrie de Position) der schon die negativen Größen unter Umständen als eingebildete Quantitäten betrachtete, spricht um so mehr der Quadratwurzel aus denselben die Existenz ab, und drückt sich in seinen Réflexions sur la métophysique du calcul infinitésimal pag. 178 so aus: Personne ne révoque en doute l'exactitude des résultats qu'on obtient par le calcul des imaginaires, quoiqu'elles ne soient que des formes algébriques et des hiéroglyphes de quantités absurdes. Und noch 1852 schreibt Weiler (in Grunerts Archiv 18, pag. 195): Es giebt keine Zahl, deren Quadrat negativ ist, ein imaginärer Werth hat an und für sich keine Bedeutung.

§ 4.

Fragt man nun: wie ist es möglich mit Zeichen zu rechnen, die keinen Sinn haben, und bei denen man sich nichts reelles denken kann und soll, so pflegt die Antwort zu sein: das Unmögliche gehe, wie etwa beim casus irreducibilis, nachdem es seine guten Dienste gethan, aus der Rechnung heraus, die Algebra müsse für alles eine Antwort haben, selbst für die unsinnigste Frage und der Engländer Saunderson (Elements of Algebra übersetzt von Joncourt pag. 358) fügt triumphirend hinzu: La force de la vérité est si grande qu'elle pénètre même au travers de l'impossible, sans que sa nature en soit altérée. Doch der Vorurtheilsfreie fühlt sich durch das alles nicht befriedigt: car on peut dire, sagt selbst Montücla pag. 29, qu'une supposition impossible doit nécessairement conduire à une expression absolument impossible. Und ich füge hinzu: Wenn die sogenannten eingebildeten Größen wirklich unmöglich wären, warum erhält man dann in Problemen, die auf einen bestimmten Grad führen, eine ganz bestimmte Anzahl von unmöglichen Lösungen? Ich begreife, daß eine Sache sich auf eine oder die andere Art ausführen läßt; fragt man mich aber, auf wie viel Arten läßt sich diese Sache nicht ausführen, so antworte ich: es giebt viele, unendlich viele Wege, die unmöglich zum erwünschten Ziele führen. Da aber die algebraischen Gleichungen neben einer bestimmten Anzahl reeller Lösungen nur eine, jetzt sogar im Voraus leicht zu bestimmende Anzahl von imaginären Wurzeln zulassen, so ist es hiemit a priori bewiesen, daß sie nicht unmöglich sind, daß sie eine Bedeutung haben, daß sie nicht, wie Carnot sagt, eine unverständliche Form sind sondern nur eine bis jetzt nicht gehörig verstandene.

Digitized by Google

§ 5.

Auch ſind die imaginären Größen zu ihrer vermeintlichen weſenloſen, nichtsſagenden, und doch auch wieder viel vermögenden, geſpenſterhaftigen Natur nur durch eine Art Uebereinkunft in Folge eines logiſchen Fehlers gekommen. So ſagt unter vielen andern Montücla pag. 27: Une quantité soit positive ou négative, ses puissances paires seront toujours positives, d'où il suit que le racius d'un quarré négativ est un être de raison ou une chose impossible. Wer fühlt nicht, beſonders ſeitdem Profeſſor Matzka in Prag 1850 (Verſuch einer richtigen Lehre von der Realität der vorgeblich imaginären Größen pag. 18) ſo eindringlich darauf aufmerkſam gemacht hat, daß hieraus nur dann die Unmöglichkeit der Quadratwurzeln aus negativen Zahlen folgen würde, wenn vorher nachgewieſen wäre, daß es außer poſitiven und negativen Zahlen keine andere gäbe. Giebt es aber nur erſt poſitive und negative Zahlen, natürlich nur in der Vorſtellung, denn in der materiellen Welt ſucht man ſelbſt die abſolute Zahl vergebens, — erkennt man den unter ihnen beſtehenden totalen Gegenſatz an, ſo wird auch in der Vorſtellung für ſolche Zahlen Platz ſein oder verſchafft werden können, welche zu den ſchon vorhandenen Zahlen nur etwa im halben Gegenſatze ſich befinden. Und dies ſind die imaginären Zahlen.

Doch da man für dieſe zweite Dimenſion an den Zahlen lange Zeit kein Auge hatte, ſo ſah man ſich, wie geſagt, zu einer Art von Convention genöthigt, laut welcher es geſtattet war, mit imaginären Größen zu rechnen, aber verboten, ſich unter ihnen irgend etwas zu denken. In dieſem Sinne ſpricht zum Beiſpiel 1821 Cauchy (Cours d'Analyse pag. 173 und 175): On appelle expression symbolique toute combinaison de signes algébriques qui ne signifie rien ... et équations symboliques toutes celles qui interprétées d'après les conventions généralement établies, sont inexactes ou n'ont pas de sens, mais desquelles on peut déduire des résultats exacts ... Ces expressions symboliques ne peuvent s'interpréter d'après les conventions généralement établies, et ne représentent rien de réel.

§ 6.

Der erſte, welcher nach Matzka's ſchätzbaren Forſchungen es der herrſchenden Lehre gegenüber auszuſprechen wagte, daß die imaginären Größen nicht unmöglich, ſondern daß ſie gleich den übrigen ableitbaren Größen vollkommen reell und nachweisbar (assignabiles) ſeien, war Profeſſor Kühn in Danzig 1750.*) Aber das war zu früh. Montücia (3, 30) fertigt ihn mit den Worten ab: Il ne donne sur ce sujet que des idées très fausses et fondées sur un déraisonnement analytique; car il en résulterait que $\sqrt{-1}$ est la même chose que $-\sqrt{1}$; und Karſten (Mathematiſche Abhandlungen pag. 272) bedauert, daß mancher von Kühns Schülern, (z. B. der ſpätere Geheime Kriegsrath von Daviſſon, mit welchem er in dieſer Angelegenheit Briefe wechſelte) durch ſolche unrichtige Vorſtellungen in ihren mathematiſchen Fortſchritten aufgehalten ſeien. Auch die Stimmen der Franzoſen Buée (1805) und Mourey (1828) und des Engländers Warren (1828) wurden anfangs überhört. Aber ſelbſt nachdem in Deutſchland durch den großen Gauß (1831) auf die Richtung in den Zahlen aufmerkſam gemacht worden war, nachdem Scheffler, Wittſtein, Matzka, Riecke und andere jeder auf ſeine Art das Imaginäre geo-

* Meditationes de quantitatibus imaginariis construendis. Novi Commentarii Academiae Petropolitanae. 1753.

metriſch dargeſtellt hatten, ſchwiegen die Gegner nicht. Der eine hielt die geometriſchen Darſtellungen für magiſche Symbole, die nichts bedeuten, aber doch Wunder thun ſollen, der andre erklärte: „derlei Zeichnungen thun gleichſam bildlich den Irrthum dar, der ihnen zum Grunde liegt.“ Ja auch ſelbſt die Anhänger dieſer neuen Lehre wiſſen in Praxi nicht viel mit ihren Theorien anzufangen, ſie quälen ſich mit Aufgaben ab, die von vorne herein keinen praktiſchen Sinn haben. So weiß Scheffler (Ueber das Verhältniß der Arithmetik zur Geometrie, 1846, pag. 155) mit Hilfe ſeiner Theorie von den compleren Zahlen einen Sinn in folgende Aufgabe hineinzubringen: „Das Alter x einer Perſon A ſei dadurch beſtimmt, daß man ſagt, vor 10 Jahren war das Quadrat des Alters dieſer Perſon gleich dem damaligen Alter einer Perſon C, welche jetzt 6 Jahr alt iſt,“ wo $x = 10 \pm 2\sqrt{-1} = 10 \pm 2\,i$ iſt. Hier ſoll nach Scheffler die imaginäre Größe (2 i) die Dauer einer fremdartigen Erſcheinnng, etwa das Lebensalter einer andern Perſon B bezeichnen. - Riecke (die Rechnung mit Richtungszahlen, 1856) korrigirt ihm die Aufgabe, um das Reſultat beſſer conſtruiren zu können und ſetzt ſtatt Zeiten Wege. So behandelt ferner Riecke pag. 92 eine Aufgabe, welche F. G. Fiſcher in ſeiner Algebra pag. 57 in der Abſicht hinſtellte, um Jedem die Luſt zu benehmen, hinter dem Reſultat einen praktiſchen Sinn herauszuklauben. Die Aufgabe lautet: Es verlangt Jemand eine Zahl, die um 10 vermehrt, und ins Quadrat erhoben, das 20fache der geſuchten Zahl giebt. Die geſuchte Zahl iſt 10 i. Riecke liefert eine Conſtruktion dazu. Burhenne (in Grunerts Archiv 22, 46) ſucht bei der Aufgabe vom goldenen Schnitt den Theilpunkt auf der vorwärtsverlängerten Linie, wo er natürlich nicht liegen kann, weil ſonſt das erſte Verhältniß ſeiner Proportion ſteigend, das andere fallend ſein müßte. Er erhält zur Antwort $x = \frac{a}{2}(1 \pm \sqrt{-3})$. Die Zeichnung dazu wird weder ihm noch Riecke ſchwer. Wahrlich, wenn die neue Theorie von den Richtungszahlen nicht beſſere Aufgaben zu löſen vermag, ſo würde, um mich der Worte Burhenne's ſelbſt zu bedienen, daraus, wenn auch nicht auf ihre Schwäche, doch auf ihre Unfruchtbarkeit zu ſchließen ſein.

§ 7.

Die Lebensfrage iſt bekanntlich dieſe: Wie kommt es, daß wenn Jemand, der bei einer Rechnung oder Zeichnung von einer gewiſſen reellen poſitiven Größe A ausgegangen und zu einem gewiſſen Reſultat B gelangt iſt, uns ſein Reſultat B nennt und uns fragt, welche Größe er ſeinen Operationen zum Grunde gelegt hat, wir außer der einen poſitiven Antwort A oft noch andere poſitive oder negative oder imaginäre Größen als Antwort finden? und wie ſind die andern Antworten zu deuten? Haben ſie zu dem uns vorgelegten Problem ſtets eine Beziehung oder löſen ſie in den meiſten Fällen bloß, wie man zu ſagen pflegt, die algebraiſche Gleichung auf?*)

Natürlich mehrere Antworten wird ſich unter Umſtänden der Frageſteller ſchon gefallen laſſen müſſen, wir dürfen ihn ja nur an einen der erſten Paragraphen der Logik, der von der Umkehrung

* Arago in ſeinem Etoge de Carnot drückt ſich ſo aus: Comment arrive-t-il que des problèmes étrangers se mêlent au problème unique que le géomètre voulait résoudre, que l'analyse réponde avec une déplorable fécondité à des questions qu'on ne lui a pas faites?

Digitized by Google

der Sätze handelt, erinnern; und er weiß ja eben so gut wie wir, daß aus dem Satze: Wenn A ist, so ist auch B, nicht mit Nothwendigkeit folgt, daß wenn B ist, auch A sein muß; es kann dann A sein, aber es kann auch C oder D sein. Was aber die Deutung der anderweitigen, nicht verlangten Antworten anbelangt, so lassen nicht bloß Schriftsteller, welche der neuen Theorie von den Richtungszahlen fern stehen, sondern auch manche ihrer Anhänger viel zu wünschen übrig. Sie gehen meistens von dem Grundsatze aus, daß was sie nicht zu deuten im Stande sind, auch nicht zu deuten sei. So soll selbst nach Matzka pag. 174 über jede Wurzel erst noch eine Diskussion veranstaltet werden, ob sie zulässig sei oder nicht.

Ich meine, wenn man von richtigen Annahmen ausgegangen ist und richtig weiter geschlossen hat, so kann man weder auf Unsinn, noch auf Falsches, noch auf Ungehöriges kommen; die Diskussion über die einzelnen Wurzeln kann daher nur darin bestehen, die nähere oder entferntere Beziehung aufzusuchen, in welcher jeder Wurzelwerth zu dem eigentlichen Problem steht, er muß eine Beziehung haben; finde ich sie nicht, so sage ich nicht: es giebt keine, sondern: ich finde sie wohl ein andermal, oder ein Anderer wird sie finden. Es darf wohl kaum noch ausdrücklich erwähnt werden, daß ich hiebei nur die echten, wesentlichen (genuinas) Wurzeln einer Gleichung im Auge habe, dagegen aber die wirklich fremden, zufälligen Wurzeln (peregrinas) nicht, welche bisweilen der leichtern Auflösung wegen in die Endgleichung, ich möchte sagen, hineinmultiplicirt sind, wie z. B. in die Summenformel einer geometrischen Reihe der Faktor (e — 1) hineinmultiplicirt ist. Doch sind das, wie sich zeigen wird, nicht alles fremde Wurzeln, weiche manche Schriftsteller so genannt haben, um sie ohne Weiteres beseitigen zu können.

§ 8.

Von dieser Idee ausgehend, habe ich schon im Jahre 1845 eine kleine Schrift unter dem Titel:

„Ueber die Anzahl der Glieder in den Summenformeln der arithmetischen, geometrischen und harmonischen Progressionen. Danzig. Kabus."

herausgegeben. Ich habe darin die Bedeutung einer gebrochenen, negativen und imaginären Gliederzahl nachgewiesen, auch durch Construktionen meine Ansicht zu verdeutlichen gesucht. Erst kürzlich habe ich erfahren, daß Ley in seiner Arithmetik und Algebra 1835 und Ettingshausen in seiner höhern Mathematik (1827) über eine negative Anzahl von Gliedern dieselbe Ansicht aufgestellt haben. Auch steht meine dortige Construktion imaginärer Größen nun nicht mehr vereinsamt da. Aus Riecke's Schrift erfuhr ich, daß Maximilien Marie 1844 (Discours sur la nature des grandeurs négatives et imaginaires) von ähnlichen Betrachtungen ausgegangen ist; und auch Dr. Sloman in Paris (Versuch die Differentiairechnung auf andre als die bisherige Weise zu begründen pag. 92) argumentirt 1856 in dieser Beziehung auf gleiche Weise. Was ich nun in meiner oben erwähnten Schrift namentlich und beispielsweise von den arithmetischen Reihen erster Ordnung nachgewiesen habe, will ich gegenwärtig von jedem arithmetischen oder geometrischen Problem, welches auf eine Gleichung des zweiten oder dritten Grades führt, zeigen, daß nämlich sämmtliche Wurzeln der Gleichung sich auf das jedesmalige Problem selbst beziehen, daß von keinen überflüßigen und überzähligen Wurzeln die Rede sein kann und darf.

Doch es wird Zeit sein, daß ich meine kühne Behauptung durch die That rechtfertige. Ich werde zu diesem Zwecke vorzugsweise solche Beispiele wählen, deren Deutung noch gar nicht ver-

Digitized by Google

ſucht oder von namhaften Schriftſtellern aufgegeben iſt, dagegen überlaſſe ich es dem Leſer ſelbſt, in Klügel's mathematiſchem Wörterbuche, in Carnot, in Lacroix's Anleitung zur Trigonometrie, in Förſtemann u. ſ. w., die Behandlung ſolcher Aufgaben nachzuſehen, die er hier vermiſſen wird.

I. Arithmetiſcher Theil.

A. Arithmetiſche Reihen der erſten Ordnung.

§ 9.

Da ich nicht vorausſetzen kann, daß jeder meiner Leſer meine oben erwähnte Schrift in Händen hat, und da ich überdies die Erfahrung gemacht habe, daß namentlich dasjenige, was ich pag. 23 über die Interpretation einer imaginären Gliederzahl geſagt habe, theilweiſe überſehen worden ſein muß, ſo will ich, mit ein Paar Beiſpielen über arithmetiſche Reihen der erſten Ordnung den Anfang machen.

1ſte Aufgabe. Aus Klügel's Wörterbuche I. pag. 192 entnehmen wir: „Wenn in einer Reihe das erſte Glied $a = 10$, der Unterſchied $d = 4$ und die Summe $s = 384$ iſt, wie groß iſt die Anzahl der Glieder (n) und das letzte Glied (z)?

Antwort. $n = -2 \pm 14$, $z = -2 \pm 56$."

Daß $z = 54$ zu $n = 12$ gehört, iſt klar, aber $z = -58$ gehört nicht zu $n = -16$. Klügel geſteht zu, daß die Summe der Glieder von 10 bis — 58 eine andre ſei, als die Summe von 10 bis + 54. Während nämlich die letztere $= 384$ iſt, wird die andre $= -432$. Dies befremdet Klügel um ſo mehr, da er wohl bemerkt hat, daß er hier 18 Glieder ſtatt 16 zu addiren hat, und er führt an, daß Pasquich daher lieber das Minuszeichen vor der Wurzelgröße ganz geſtrichen hat. Für ſeine Perſon beruhigt er ſich aber bald, da er die Entdeckung macht, daß wenn auch die arithmetiſche Summe der 18 Glieder von 10 bis — 58 nicht ſtimmen will, doch das Produkt $(10 - 58) \times -16$ eben ſo gut $= 768 = 2.384$ ſei, als das Produkt $(10 + 54) \times 12$. Dies beweiſt aber bekanntlich nichts, da jede beliebige zwei Glieder, die von den Enden der Reihe gleich weit entfernt ſind, zuſammen — 48 geben und mit — 16 multiplicirt das richtige Produkt liefern. Als ich die Schrift: „Ueber die Anzahl der Glieder" verfaßte, war mir dieſe dem ſonſtigen Scharfſinne Klügel's keine Ehre machende Stelle entgangen. Dahee wollen wir dieſes Beiſpiel hier genauer durchnehmen. Die Reihe lautet:

$-58, -54, -50, -46, -42, -38, -34, -30, -26, -22, -18, -14, -10, -6, -2, +2, +6 \mid 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38, 42, 46, 50, 54.$

$$\text{Aus } n = -\frac{2a - d}{2d} \pm \sqrt{\frac{2.s}{d} + \left(\frac{2a - d}{2d}\right)^2}$$

folgt, da $a = 10$, $d = 4$, $s = 384$ iſt, $n = -2 \pm 14$, alſo $n = 12$ und $= -16$. Ueber $n = 12$ dürfte ich natürlich kein Wort verlieren, doch bringe ich in Erinnerung, daß wenn gefragt wird, wie viel Glieder der Reihe, die mit 10 anfängt, habe ich zu nehmen, damit ich als Summe 384 erhalte, daß, ſage ich, dann ein als Antwort erhaltenes poſitives n anzeigt, daß ich

wirklich Glieder zu **nehmen** habe. Erhalte ich aber auf meine Frage ein negatives n zur Antwort, so heißt das natürlich doch, ich habe keins von allen zu nehmen, sondern sogar noch einige weniger, d. h. von den vorigen eine gewisse Anzahl (hier 16) fortzugeben.*) Ein großer Irrthum von Klügel ist es daher vorweg, daß er hiebei noch das erste Glied 10 hineinzieht. Es sollte überhaupt nichts genommen werden, am allerwenigsten ein Glied der eigentlichen Reihe. Auch kann natürlich nun nicht mehr von dem Gliede — 58 die Rede sein, es gehört nicht mehr zu den 16 Gliedern, die dem ersten Gliede vorangehen. Zählt man nun zusammen, was man fortgegeben hat, so ist es = — 384, d. h. wir haben + 384 genommen. Durch die vorliegende Reihe, in welcher a = 10, d = 4 ist, kann ich also wirklich auf doppelte Art in den Besitz von + 384 gelangen, entweder, indem ich die ersten 12 Glieder nehme, oder indem ich die 16 Glieder, welche dem ersten Gliede vorangehen, fortgebe.

Wie ich schon in meiner früheren Schrift, pag. 16., bemerkt habe, wo ich es mit andern Autoren zu thun hatte, eine Hauptquelle des Irrthums, den man in dieser Beziehung beging, war der, daß man eine Cardinalzahl mit einer Ordinalzahl verwechselte; allerdings hat das Glied — 58 den Index — 16, aber deshalb gehört es nicht zu den 16 Gliedern, die dem ersten vorangehen, da vor dem ersten Gliede noch das 0te Glied kommt.

§ 10.

Wir wollen jetzt, Pasquich gegenüber und denen, die ihm vielleicht noch heute anhängen, zeigen, daß die Fortlassung des Minuszeichens vor der Wurzelgröße auch nicht immer vor Verlegenheit schützt. Wir legen folgende Frage vor:

2te Aufgabe. Wie viel Glieder einer Reihe, in welcher a = 10, d = 4 ist, habe ich zu nehmen, um in den Besitz von s = — 6 zu gelangen?

Die richtige Antwort ist n = — 2 ± 1, nach Pasquich bloß n = — 1. Aber selbst diese Antwort werden seine Anhänger nicht zu deuten verstehen. Klügel wird 10 + 6 + 2 zusammenzählen, andre bloß 6 + 2, noch andre werden bloß die 6 nehmen, aber alle werden sich wundern, daß nicht — 6 herauskommt. Es ist aber wirklich sowohl die Summe von — 1 Glied, als auch die Summe von — 3 Gliedern = — 6, wie der Leser sich nun wohl selbst sagen wird.

Doch ich gehe zur Hauptsache:

3te Aufgabe. Wie viel Glieder der Reihe, in welcher a = 10, d = 4 ist, habe ich zu nehmen, um successive in den Besitz von s = — 10, — 16, — 26, — 40, — 400 zu gelangen?

Antwort. n = — 2 ± i, — 2 ± 2 i, — 2 ± 3 i, — 2 ± 4 i, — 2 ± 14 i.

Ich verlange in allen diesen Fällen etwas unmögliches. Denn die Summe einer steigenden Reihe hat ein Minimum, die kleinste Summe, die unsre Reihe haben kann, ist s = — 8 für n = — 2; gebe ich von den dem ersten Gliede vorangehenden Gliedern mehr als zwei fort, so wächst die Summe wieder. Verlangt man demnach das als unmöglich zu leisten Erkannte von mir, so muß man mir, nachdem ich mein Möglichstes gethan habe, (d. h. nachdem ich n = — 2 ge-

* Vergl. Ueber die Anzahl pag. 12.

Digitized by Google

nommen habe) gestatten, jetzt eine geschickte Wendung zu machen, ich werde, was $n = -2 - q.i$ anlangt, die nächsten q Glieder nicht fortgeben, wie es das Minuszeichen mit sich bringt, sondern nehmen. und in Bezug auf $n = -2 + q\,i$, die vorigen q Glieder nicht nehmen, sondern fortgeben.

Denjenigen zu gefallen, welchen das angegebene Verfahren als eine Art coup de main erscheinen möchte, will ich noch folgendes hinzufügen: Es ereignet sich bekanntlich schon bei Gleichungen des ersten Grades, daß wenn die Frage verkehrt gestellt ist, die Algebra als Antwort ein negatives Resultat giebt und dadurch gewissermaßen den Fragenden auffordert, die Aufgabe passender zu stellen. So ist es auch hier mit dem imaginären Resultat, es weist den Fragesteller zurecht, und er wird, wenn er nicht zu denen gehört, die ohne Weiteres verwerfen, was sie nicht verstehen, nach einigem Besinnen seine neue Frage so stellen:

Verbesserte Aufgabe: Wie viele von den Gliedern, die dem ersten Gliede $a = 10$ vorangehen, habe ich bei $d = 4$ fortzugeben, und sobald das Fortgeben vom Ziele abführt, zu nehmen, damit ich in Summa, resp. 10, 16, 26, 40, . . . 400 fortgegeben habe?

Die jetzige algebraische Antwort lautet: $2 - i$, $2 - 2\,i$, ... $2 - 14\,i$ und ihre Deutung ist: Gieb nur die beiden ersten Glieder weg und von den folgenden nimm so viele, als der Coefficient von i anzeigt.

Anm. Wegen der andern Auflösung könnte die Fassung der Aufgabe so sein: Wie viele von den Gliedern, die dem ersten vorangehen, habe ich fortzugeben, und wenn das Fortgeben der folgenden Glieder vom Ziele abführt, wie viele von den vorigen Gliedern habe ich nochmals fortzugeben, damit ich im Ganzen etwa 26 fortgegeben habe? Die Antwort wäre alsdann: $2 + 3.i$ Glieder habe ich fortzugeben. Ich habe also, wohl gemerkt, 5 Glieder fortgegeben.

Dem Physiker sagt vielleicht folgende Fassung der Aufgabe mehr zu:

Noch mehr verbesserte Aufgabe: Als ein junger Gelehrter einen fallenden Körper zu beobachten anfing, fand er, daß er in der ersten Sekunde durch einen Raum $a = 10$, in jeder folgenden Sekunde durch einen um $d = 4$ größeren Raum fiel. Ein dabei stehender Bauer sagte: ich beobachte den Körper schon lange; als du ankamst, hatte derselbe vor meinen sehenden Augen sich schon durch einen Raum von $s = 400$ bewegt. Nun sollte der Gelehrte rathen, wie lange der Bauer den Körper schon angesehen habe? Derselbe gerieth aber in große Verlegenheit; denn als er mit vornehmer Miene in seine Gleichung: $s = an + \frac{n.\,n-1}{2}.\,d$ setzte $a = 10$, $d = 4$. $s = -400$, erhielt er $n = -2 \pm 14\,i$, und als er hiemit unzufrieden und schon etwas kleinlaut $a = 6$, $d = -4$, $s = 400$ setzte, bekam er $n = 2 \pm 14\,i$. Verdrießlich wandte er sich von dem Bauer mit den Wörten ab: Das ist unmöglich, du hast gelogen oder falsch gesehen. Der Bauer aber betheuerte, daß er den Körper 16 Sekunden lang unverwandt angesehen habe.

§ 11.

Wir wollen jetzt in ein Paar Beispielen eine fallende Reihe behandeln. Wegen der dabei vorkommenden von mir sogenannten Nebenreihe verweise ich auf meine frühere Schrift pag. 6.

4te Aufgabe.

In der arithmetiſchen fallenden Reihe

$$8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4.$$

kennt man das erſte Glied $a = 8$, die Differenz $d = -1$ und die Summe $= s$, wofür wir ſucceſſive 36 oder $36\frac{1}{4}$, $35\frac{5}{8}$ oder $36\frac{5}{8}$, $34\frac{1}{8}$ oder $38\frac{1}{4}$ ſetzen wollen. Aus wieviel Gliedern beſteht in jedem Falle die Reihe?

Antwort. Aus $s = a.n - \frac{n.n-1}{2} d$ folgt $n^2 - \frac{2a+d}{d} n = -\frac{2.s}{d}$, wo alſo d poſitiv iſt. Man ſetze $\frac{2a+d}{d} = \alpha$, $\frac{2.s}{d} = \sigma^2$, dann folgt aus $n^2 - \alpha n = -\sigma^2$

$$n = \frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \sigma^2}.$$

So wie die ſteigende Reihe ein Minimum von großer Bedeutung hatte, ſo dreht ſich hier alles um das Maximum. Daſſelbe findet bekanntlich ſtatt, wenn $\sigma^2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$ iſt, oder wenn $s = \frac{d}{2}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ geſetzt wird, wobei $n = \frac{\alpha}{2}$ iſt. Nehme ich nun $\sigma^2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - q^2$ an, ſo erhalte ich für n zwei reelle Werthe, nämlich $n = \frac{\alpha}{2} \pm q$, ſetze ich aber $\sigma^2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + q^2$, ſo wird n imaginär, nämlich $n = \frac{\alpha}{2} \pm i.q$.

Für unſer Zahlenbeiſpiel iſt $\alpha = 17$, $\frac{\alpha}{2} = 8\frac{1}{2}$, $\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = 72\frac{1}{4}$. Wir erhalten alſo in unſrer Reihe die größt-möglichſte Summe, wenn wir $8\frac{1}{2}$ Glieder nehmen, und dieſe möglichſt-größte Summe beträgt $36\frac{1}{8}$.

Für jede andre Summe haben wir $n = 8\frac{1}{2} \pm \sqrt{72\frac{1}{4} - \sigma^2}$. Nun ſei

1) $q^2 = \frac{1}{4}$; iſt dann $\sigma^2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - q^2$, iſt aber $\sigma^2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + q^2$, d. h. iſt $s = \begin{cases} 36, \\ 36\frac{1}{4}, \end{cases}$ ſo iſt $n = \begin{cases} 8\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \\ 8\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} i. \end{cases}$

2) $q^2 = 1$; iſt dann $\sigma^2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - 1$, iſt aber $\sigma^2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + 1$, d. h. iſt $s = \begin{cases} 35\frac{5}{8}, \\ 36\frac{5}{8}, \end{cases}$ ſo iſt $n = \begin{cases} 8\frac{1}{2} \pm 1 \\ 8\frac{1}{2} \pm i. \end{cases}$

3) $q^2 = 4$; iſt dann $\sigma^2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - 4$, iſt aber $\sigma^2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + 4$, d. h. iſt $s = \begin{cases} 34\frac{1}{8}, \\ 38\frac{1}{8}, \end{cases}$ ſo iſt $n = \begin{cases} 8\frac{1}{2} \pm 2 \\ 8\frac{1}{2} \pm 2 i. \end{cases}$

Da nun hier fortwährend von halben Gliedern die Rede iſt, ſo müſſen wir vor allem die vorgelegte Reihe in eine andre Reihe auflöſen, in welcher je zwei Glieder zuſammen gleich einem

Digitized by Google

Glieder der Hauptreihe ſind, ich nenne die neue Reihe, welche gleichfalls eine arithmetiſche Reihe der erſten Ordnung iſt, die Nebenreihe.

Hauptreihe:

8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, — 1, — 2, — 3,

. . . . . .

Nebenreihe.

. . . . . .

$$\ldots \frac{21}{8} + \frac{19}{8}, \frac{17}{8} + \frac{15}{8}, \frac{13}{8} + \frac{11}{8}, \frac{9}{8} + \frac{7}{8}, \frac{5}{8} + \frac{3}{8}, \frac{1}{8} + -\frac{1}{8}, -\frac{3}{8} + -\frac{5}{8}, -\frac{7}{8} + -\frac{9}{8} \ldots$$

ad 1) Soll nun die Summe 36 ſein, ſo haben wir erſt $8\frac{1}{2}$ Glieder zu nehmen, welches $36\frac{1}{8}$ macht, und noch das nächſte halbe Glied, welches $-\frac{1}{8}$ iſt; oder nachdem wir $8\frac{1}{2}$ Glieder genommen haben, geben wir das letzte halbe Glied, welches $+\frac{1}{8}$ iſt, wieder zurück.

Soll aber die Summe $36\frac{1}{4}$ ſein, ſo müſſen wir wieder zunächſt die erſten $8\frac{1}{2}$ Glieder nehmen und dann noch das nächſte halbe Glied auf die entgegengeſetzte Art nehmen, alſo weggeben. Oder nachdem wir die erſten $8\frac{1}{2}$ Glieder genommen haben, geben wir das letzte halbe Glied auf die entgegengeſetzte Art, d. h. wir nehmen es noch zu.

ad 2) Die Summe ſoll $35\frac{5}{8}$ ſein. Man hat wieder zunächſt ſo viele Glieder zu nehmen, daß die größt-möglichſte Summe herauskommt, alſo $8\frac{1}{2}$ Glieder. Nun ſoll man noch das nächſte volle Glied dazunehmen. Da fragt ſich zunächſt, welches iſt denn das letzte Glied geweſen? Natürlich das $8\frac{1}{2}$te Glied, welches aus der zweiten Hälfte des 8ten Gliedes ($\frac{3}{8}$) und erſten Hälfte des 9ten Gliedes ($\frac{1}{8}$) beſteht und $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ iſt. Das nächſte Glied alſo, welches noch zuzunehmen iſt, iſt das $9\frac{1}{2}$te Glied, beſtehend aus $-\frac{1}{8}$ und aus $-\frac{3}{8}$. Wir haben alſo zu $36\frac{1}{8}$ noch $-\frac{1}{2}$ hinzuzufügen, was $35\frac{5}{8}$ giebt. Oder man nehme von $36\frac{1}{8}$ das beſprochene letzte Glied $\frac{1}{2}$ hinweg.

Soll aber die Summe $36\frac{5}{8}$ ſein, ſo nehmen wir natürlich zuerſt die $8\frac{1}{2}$ erſten Glieder, dann nehmen wir noch das nächſte Glied, oder geben das letzte Glied, nachdem es in ſein Gegentheil umgewandelt iſt.

ad 3) Die Summe ſoll $34\frac{1}{8}$ ſein. Zu dieſem Zwecke hat man zu der Summe der erſten $8\frac{1}{2}$ Glieder noch die Summe der beiden nächſten Glieder (alſo -2) zu addiren, oder die Summe der beiden letzten Glieder ($+2$) abzuziehen.

Soll aber die Summe $38\frac{1}{8}$ ſein, ſo würde das gehen, wenn man ſich erlauben dürfte, die Summe der beiden nächſten Glieder, welche man addiren ſoll, zu ſubtrahiren, oder die Summe der beiden letzten Glieder, welche man abziehen ſoll, zu addiren.

Verbeſſerte Aufgabe: Ein Reiſender macht den erſten Tag 8 Meilen, jeden folgenden Tag eine Meile weniger als den vorigen Tag. a) Nach wie viel Tagen hat er ſich von ſeiner Heimath um 36, um $35\frac{5}{8}$, um $34\frac{3}{8}$ Meilen entfernt? b) Nach wieviel Tagen hat er $36\frac{1}{4}$, $36\frac{5}{8}$, $38\frac{1}{8}$ Meilen gemacht?

Antwort auf a) Nach 8 oder 9 Tagen, nach $7\frac{1}{2}$ oder $9\frac{1}{2}$ Tagen, nach $6\frac{1}{2}$ oder $10\frac{1}{2}$ Tagen.

Antwort auf b) Nach 9 Tagen, nach $9\frac{1}{2}$ Tagen, nach $10\frac{1}{2}$ Tagen. Dieſe Antworten wollen ſagen: Der Reiſende geht ſo lange vorwärts wie möglich, er entfernt ſich von ſeiner Heimath ſo weit, als es das Geſetz erlaubt, nach welchem er geht, dann geht er noch ein Paar Tage zurück,

immer in Folge und mit Beobachtung des ihm auferlegten Gesetzes, wobei aber, wenn früher die Tage von Morgens bis Abends gerechnet wurden, sie jetzt von Mittag zu Mittag gezählt werden müssen.

§ 12.

5te Aufgabe. Ein Körper steigt in der ersten Sekunde $a = 9$ Längenmaße in die Höhe, in jeder folgenden Sekunde $d = 2$ solcher Maße weniger. Nach wie viel Sekunden wird er s Maß gestiegen oder nach Umständen durchlaufen sein?

Antwort. 1) Es sei $s = \sigma^2 = 16$; da $\frac{\alpha}{2} = 5$ ist, so ist $16 = 25 - q^2$ und $q = 3$.

Also ist $n = 5 \pm 3$. Schon nach 2 Sekunden ist der Körper 16 Maß in die Höhe gestiegen, aber wenn wir ihn 6 Sekunden später beobachten, so finden wir ihn in derselben Höhe.

2) Es sei $s = \sigma^2 = 34$. So hoch kann der Körper nicht steigen, seine größte Höhe ist 25 Maß. Daher heißt jetzt die Frage: Nach wie viel Sekunden hat der Körper einen Weg $= 34$ Maß durchlaufen? Da hier $34 = 25 + q^2$ ist, und $q = 3$, so ist

$$n = 5 \pm 3\,i,$$

d. h. um den verlangten Raum zu durchlaufen, muß der Körper erst 5 Sekunden, das ist, so lange wie möglich steigen, dann noch 3 Sekunden fallen; in den ersten 5 Sekunden steigt er durch einen Raum $= 25$ Maß und in den nächsten 3 Sekunden fällt er durch einen Raum von 9 Maß; er hat also im Ganzen einen Weg von $25 + 9 = 34$ Maß zurückgelegt und zwar in $5 + 3 = 8$ Sekunden.

Anmerkung. Wegen des doppelten Zeichens in dem Ausdruck $n = 5 \pm 3\,i$ sei noch folgendes gesagt: Der Körper ist in den ersten 8 Sekunden durch folgende Räume gestiegen:

$$9,\ 7,\ 5,\ 3,\ 1,\ -1,\ -3,\ -5.$$

Entweder wir nehmen nun von dem, was der Körper in 5 Sekunden gestiegen ist, das hinweg, was er in den nächsten 3 Sekunden gestiegen ist, oder wir legen noch das zu, was er in den letzten 3 Sekunden (in der 3ten. 4ten und 5ten) gestiegen ist.

§ 13.

Nach diesen Beispielen wollen wir die Hauptsache im Allgemeinen behandeln.

In einer fallenden arithmetischen Reihe

$a,\ a + d,\ a + 2d, \ldots\ldots$, wo $n = -\frac{2a - d}{2d} \pm \sqrt{\frac{2s}{d} + \left(\frac{2a - d}{2d}\right)^2}$ ist,

giebt es für s ein Maximum $M = -\frac{d}{2} \cdot \left(\frac{2a - d}{2d}\right)^2$, für diesen Fall ist $n = -\frac{2a - d}{2d} = p$, so daß also auch geschrieben werden kann: $M = -\frac{d}{2} \cdot p^2$. Hieraus, so wie auch aus andern Gründen, kann man schließen, daß wenn man die Reihe rückwärts liest und das $p$te Glied als das erste ansieht, daß dieses neue erste Glied $= -\frac{d}{2}$ und der neue Unterschied $= -d$ ist, so wie auch, daß die nach dieser neuen Zählung dem ersten Gliede vorangehenden, [oder nach der alten Zählung auf das $p$te Glied folgenden] Glieder sich von den folgenden [oder respective von den vorigen] Gliedern nur durch das Zeichen unterscheiden.

Digitized by Google

Soll nun s um F kleiner als M ſein, alſo $s = M - F$, ſo darf man natürlich nicht alle p Glieder nehmen, ſondern vielleicht q Glieder weniger oder q Glieder mehr. Die Summe dieſer q Glieder iſt $F = -\frac{d}{2} p^2$. Demnach iſt $s = -\frac{d}{2} p^2 + \frac{d}{2} q^2$. Setzen wir dieſen Werth von s unter das Wurzelzeichen, ſo erhalten wir als Beſtätigung $n = p \pm q$.

Verlangt man aber, daß die Summe um F größer werden ſoll, als das Maximum M, ſo hat man weiter nichts zu thun, als zu den erſten p Gliedern (alter Zählung) noch deren letzte q Glieder hinzuzufügen, oder von den erſten p Gliedern die folgenden q Glieder abzuziehen. Setzt man nun den jetzigen Werth von $s = M + F = -\frac{d}{2} p^2 - \frac{d}{2} q^2$ unter das Wurzelzeichen, ſo erhält man

$$n = p \pm q \cdot i$$

woraus alſo die Bedeutung des i ſattſam hervorgeht.

§ 14.

Ebenſo giebt es in einer arithmetiſchen ſteigenden Reihe a, a + d, a + 2 d, . . . für s ein Minimum = m, welches etwa aus

$$n = -\frac{2a - d}{2d} \pm \sqrt{\frac{2.s}{d} + \left(\frac{2a - d}{2d}\right)^2}$$

auf die bekannte Art gefunden werden kann, man erhält

$$m = -\frac{d}{2} \cdot \left(\frac{2a - d}{2d}\right)^2. \quad \text{Hiezu gehört } n = -\frac{2a - d}{2d} = -p$$

Demnach iſt auch $m = -\frac{d}{2} p^2$ zu ſetzen. Wir ſchließen hieraus, daß das erſte der p Glieder, die dem erſten Gliede a vorangehen, $\frac{d}{2}$ iſt und daß ſie um d wachſen; ſo wie auch, daß die noch frühern Glieder ſich nur durch das Vorzeichen von den folgenden unterſcheiden.

Soll nun die Summe s ſo klein nicht ſein, als m beſagt, ſondern um f größer, kurz ſoll $s = m + f$ ſein, ſo darf es dabei nicht bleiben, daß man die p Glieder, die dem erſten Gliede a vorangehen, weggiebt, ſondern man wird einige (vielleicht q) Glieder weniger weggeben, d. h. q Glieder zulegen, auch kommt man eben dahin, wenn man noch die q früheren Glieder wegnimmt. Da dann $f = \frac{d}{2} q^2$ iſt, ſo iſt $s = -\frac{d}{2} p^2 + \frac{d}{2} q^2$. Setzt man dieſen Ausdruck für s unter das Wurzelzeichen, ſo findet man gleichfalls $n = -p \pm q$.

Soll aber die Summe s noch um f kleiner werden, als das Minimum, kurz ſoll $s = m - f$ werden, ſo habe ich nicht bloß die beſprochenen rückwärtsliegenden p Glieder wegzugeben, ſondern auch die folgenden (noch mehr rückwärtsliegenden) q Glieder zuzulegen, oder die vorigen q Glieder gleichfalls wegzugeben. Die Summe drückt ſich in dieſem Falle ſo aus:

$$s = -\frac{d}{2} p^2 - \frac{d}{2} q^2$$

Setzt man dieſen Ausdruck unter's Wurzelzeichen, ſo wird jetzt

$$n = -p \pm q \cdot i,$$

wodurch auch hier die Bedeutung einer complexen Gliederzahl ſich bis zur Evidenz herausſtellt.

Digitized by Google

Giebt alſo eine Rechnung $n = \pm p \pm q \cdot i$, ſo bedeutet + vor dem reellen Theil, daß man die erſten p vorwärtsliegenden Glieder nehmen ſoll, —, daß man p rückwärtsliegende Glieder weggeben ſoll, dagegen bedeutet + vor dem imaginären Theil, daß man q vorwärtsliegende Glieder weggeben ſoll, —, daß man, rückwärtsgehend, q Glieder nehmen ſoll.

B. Arithmetiſche Reihen der zweiten Ordnung.

§ 15.

6te Aufgabe (als Vorbereitung für die folgende). In einer arithmetiſchen Reihe der zweiten Ordnung, deren erſtes Glied $a = 1$ iſt, und in welcher das erſte Glied der erſten Differenzenreihe (d) gleich iſt dem erſten Gliede der conſtanten zweiten Differenzenreihe (e), und zwar in welcher $d = e = 6$ iſt, hat man $2x$ Glieder nehmen müſſen, um eine gewiſſe Summe $= S$ $(= 64)$ zu erlangen. Man will zu der nämlichen Summe auf eine andere Art kommen; man will nämlich zunächſt die erſten x Glieder fortgeben, dann die Hälften der nächſten y Glieder nehmen und die Hälften der vorigen y Glieder weggeben. Wie groß iſt y?

Auflöſung. Wir wollen die auf die erſten x Glieder folgenden y Glieder, welche zu nehmen ſind, als eine beſondere Reihe anſehen, in welcher das erſte Glied $= a_1$, das erſte Glied der erſten Differenzenreihe $= d$, und ein Glied der conſtanten zweiten Differenzenreihe $= e_1 = e$ iſt. Ebenſo wollen wir von den erſten x Gliedern die letzten y Glieder, welche wegzugeben ſind, als eine beſondere Reihe anſehen, deren erſtes Glied, (das xte der Hauptreihe) $= a^1$ iſt, und in welcher das erſte Glied der erſten Differenzenreihe $= d^1$ und ein Glied der conſtanten zweiten Differenzenreihe $= e^1 = e$ iſt.

Die y Glieder, deren Hälften zu nehmen ſind, lauten alsdann:

$$a_1 ; a_1 + d_1 ; a_1 + 2d_1 + e ; a_1 + 3d_1 + 3e ; a_1 + 4d_1 + 6e ; \ldots$$

dagegen ſind die y Glieder, deren Hälften fortzugeben ſind, ſo beſchaffen:

$$a^1 ; a^1 + d^1 ; a^1 + 2d^1 + e ; a^1 + 3d^1 + 3e ; a^1 + 4d^1 + 6e ; \ldots .$$

Der Erfolg von dieſem Nehmen und Geben wird der ſein, daß im Ganzen y Glieder von folgender Reihe genommen ſind:

$$\frac{a_1 - a^1}{2} ; \frac{a_1 - a^1}{2} + \frac{d_1 - d^1}{2} ; \frac{a_1 - a^1}{2} + 2.\frac{d_1 - d^1}{2} ; \frac{a_1 - a^1}{2} + 3.\frac{d_1 - d^1}{2} ; \ldots .$$

Dieſes iſt aber eine arithmetiſche Reihe der erſten Ordnung, deren erſtes Glied $\alpha = \frac{a_1 - a^1}{2}$ und deren Differenz $\delta = \frac{d_1 - d^1}{2}$ iſt.

Nun iſt aber aus dem allgemeinen Gliede der Hauptreihe

$$z = a + (n-1)\,d + \frac{n-1.\,n-2}{2} \cdot e$$

leicht zu erkennen, daß

$$a_1 = 1 + 3x.(x+1) \qquad \text{und } a^1 = 1 + 3x.(x-1)$$
$$d_1 = 6.(x+1) \qquad\qquad d^1 = -6.(x-1) \qquad \text{iſt.}$$

Demnach iſt $\alpha = 3x$ und $\delta = 6x = 2\alpha$.

Aber die Summe von y Gliedern einer Reihe, deren erſtes Glied α und deren Differenz 2α iſt, beträgt $\alpha\, y^2$; bezeichnen wir dieſe Summe mit σ, ſo haben wir $\sigma = 3\, x\, y^2$.

Noch leichter erkennt man, daß die Summe der erſten x Glieder der Hauptreihe s, welche fortgegeben werden ſoll, x^3, alſo daß $s = x^3$ iſt, ebenſo daß $S = 8\, x^3$ iſt.

Nun ſoll den Bedingungen der Aufgabe gemäß $S = -s + \sigma$ ſein, alſo haben wir $8\, x^3 = -x^3 + 3\, x\, y^2$, oder $9\, x^3 = 3\, x\, y^2$, alſo

$$y^2 = 3\, x^2, \text{ und } y = \pm x \sqrt{3}.$$

Das Minuszeichen vor der Wurzelgröße macht nach dem Vorigen keine Schwierigkeit. Während nämlich $y = +x\sqrt{3}$ bedeutet, wir ſollen von der Reihe

$$\alpha,\ 3\,\alpha,\ 5\,\alpha,\ 7\,\alpha \ldots$$

$x\sqrt{3}$ Glieder nehmen, verlangt der Ausdruck $y = -x\sqrt{3}$, daß wir diejenigen $x\sqrt{3}$ Glieder, welche dieſer Reihe vorangehen, weggeben ſollen. Die wegzugebenden Glieder ſind aber

$$-\alpha,\ -3\,\alpha,\ -5\,\alpha,\ -7\,\alpha, \ldots$$

Jeder ſieht jetzt, daß es einerlei iſt, ob ich von der erſten Reihe y Glieder nehme, oder von der letzten Reihe y Glieder gebe.

Wohl aber werden hier einige Worte über die irrationale Gliederanzahl $x\sqrt{3}$ überhaupt nicht an unrechter Stelle ſein. — Ich ſetze $x\sqrt{3} = \frac{p}{q}$, wo für $q = 100000$ oder $= 10000000$ zu ſchreiben iſt, je nachdem man die Rechnung auf 5 oder 7 Dezimalſtellen einzurichten gedenkt, und wo alſo $p = q.\, x.\, \sqrt{3}$ eine ganze Zahl repräſentirt. Wir haben dann zu der eigentlichen Reihe

$$\alpha,\ 3\,\alpha,\ 5\,\alpha,\ 7\,\alpha, \ldots, \text{ deren Differenz } \delta = 2\,\alpha \text{ iſt,}$$

eine Nebenreihe zu bilden, in welcher je q Glieder gleich einem Gliede der eigentlichen Reihe ſind. Nennen wir das erſte Glied der Nebenreihe a, und die Differenz der auf einander folgenden Glieder b, ſo iſt nach pag. 6 meiner oft citirten Schrift

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{\alpha}{q} - (q-1).\frac{\delta}{2.q.q} \\ &= \frac{3\,x}{q} - (q-1).\frac{3\,x}{q.q} \\ &= \frac{3\,x}{q.q.} \end{aligned}\right\} \text{ und } \left.\begin{aligned} b &= \frac{\delta}{q.q} \\ &= \frac{6\,x}{q.q} \end{aligned}\right\}$$

Nun kommt es auf eins hinaus, ob wir von der eigentlichen Reihe $\frac{p}{q}$ Glieder nehmen, oder von der Nebenreihe p Glieder. Wenn aber, wie bei uns, das erſte Glied der Nebenreihe $= a$, und die Differenz $b = 2.\, a$ iſt, ſo iſt die Summe von p Gliedern derſelben

$$\sigma = a.\, p^2 = \frac{3\,x}{q.q}.\, q.\, q.\, x^2.\, 3 = 9\, x^2,$$

wie es ſich gebührt.

Beiſpiel und Probe. Die Hauptreihe, die der ganzen Unterſuchung zum Grunde liegt, iſt folgende

$$\ldots\ldots 91, 61, 37, 19, 7, 1, \mid 1, 7, 19, 37, 61, 91 \ldots\ldots$$
$$6, 12, 18, 24, 30$$
$$6, 6, 6, 6,$$

in welcher das erſte Glied nach dem Strich, nämlich 1 das erſte Glied a iſt. Nehmen wir nun $S = 64$ an, ſo iſt $2x = 4$, $x = 2$, $y = 2\sqrt{3} = 3{,}464102$.

a) Man ſetze zunächſt $y = 3$. Dann iſt

$$-1-7+\frac{19+37+61-7-1-1}{2} = -8+54 = 46 \text{ (ſtatt 64).}$$

b) Man ſetze $y = 4$, dann iſt $-8+\frac{19+37+61+91-7-1-1-7}{2}$

$= -8+96 = 88$ (ſtatt 64).

c) Man ſetze $y = 3\frac{1}{2}$. Dies erfordert die Conſtruktion einer Nebenreihe zweiter Ordnung, in welcher je zwei Glieder gleich einem Gliede der Hauptreihe ſind. Hier iſt ſie:

$$2\tfrac{3}{8} \mid \tfrac{7}{8}+\tfrac{1}{8} \parallel \tfrac{1}{8}+\tfrac{7}{8} \mid 2\tfrac{3}{8}+4\tfrac{5}{8} \mid 7\tfrac{5}{8}+11\tfrac{3}{8} \mid 15\tfrac{7}{8}+21\tfrac{1}{8} \mid 27\tfrac{1}{8}+33\tfrac{7}{8} \mid 41\tfrac{3}{8}$$

Nun iſt $-8+\frac{19+37+61+41\frac{3}{8}-7-1-1-2\frac{3}{8}}{2} = -8+73\frac{1}{2} = 65\frac{1}{2}$ (ſtatt 64).

Wir überlaſſen es dem Leſer, die Probe weiter auszudehnen, und bemerken lieber noch, daß $y = -x\sqrt{3} = -3\frac{1}{2}$ (circa), im weſentlichen nichts anders bedeutet, als $y = +x\sqrt{3} = +3\frac{1}{2}$ (circa). Es verwandeln ſich durch das Minuszeichen nur die nächſten $3\frac{1}{2}$ zu nehmenden Glieder in die vorigen $3\frac{1}{2}$ zu gebenden Glieder und die vorigen $3\frac{1}{2}$ wegzugebenden Glieder in die folgenden $3\frac{1}{2}$ zu nehmenden Glieder. Wir erlangen alſo für $y = -3\frac{1}{2}$ nur etwas der Form nach verſchiedenes, nämlich

$$-8-\frac{7+1+1+2\frac{3}{8}-19-37-61-41\frac{3}{8}}{2}$$

§ 16.

7te Aufgabe. Man ſoll in der reinen kubiſchen Gleichung

$$x^3 = 8\,k^3 = 64$$

eine praktiſche arithmetiſche Bedeutung der beiden imaginären Wurzeln angeben.

Auflösung. Wir gehen von der Reihe aus:

... 91, 61, 37, 19, ! 7, 1, | 1, 7, 19, 37, 61, 91 ...

in welcher $a = 1$, $d = e = 6$ ist.

Die Summenformel $s = a\,n + \frac{n.\,n-1}{2}\,d + \frac{n.\,n-1.\,n-2}{2.\,3}.\,e$ schmilzt hier in folgende zusammen: $s = n^3$.

Fragt man nun, wie viel Glieder (x) dieser Reihe hat man zu nehmen, damit die Summe $8\,k^3 = 64$ werde, so liegt die Antwort in folgender Gleichung: $x^3 = 8\,k^3 = 64$. Aus ihr ergiebt sich, daß

entweder $x = 2\,k = 4$ ist, oder daß $x = -k \pm k\sqrt{3}.\,i = -2 \pm 2.\sqrt{3}.\,i$ ist.

Beachten wir nun einerseits, daß unsre Reihe vor und nach dem Striche identisch ist und sein muß, und halten wir andrerseits zusammen, was in der vorigen Aufgabe und am Schlusse der 6ten Aufgabe gesagt ist, so erkennen wir klar, daß der complexe Ausdruck

$$x = -k - i.\,k\sqrt{3}$$

die Bedeutung hat: Man gelangt zu der vorgeschriebenen Summe $8\,k^3$, wenn man diejenigen k Glieder, welche dem ersten Gliede $a = 1$ vorangehen, fortgiebt, dann die Hälften der noch frühern $k.\sqrt{3}$ Glieder nimmt und die Hälften der ihnen folgenden $k.\sqrt{3}$ Glieder weggiebt.

Der andre Werth $x = -k + i\,k\sqrt{3}$ hat, wie wir schon wissen, im wesentlichen dieselbe Bedeutung, doch wollen wir bei seiner Darlegung eine andre Ausdrucksweise wählen. Wir wollen, nachdem wir die k Glieder fortgegeben haben, welche dem ersten Gliede $a = 1$ vorangehen, hinter dem letzten fortgegebenen Gliede irgend ein Zeichen machen, etwa ein Ausrufungszeichen (!), und diejenigen Glieder, welche links und rechts vom Ausrufungszeichen gleich weit abstehen, entsprechende Glieder nennen. Dann können wir die Bedeutung des andern complexen Ausdrucks faßlicher so geben: Nachdem man die schon besprochenen k Glieder vor dem Striche fortgegeben hat, hat man noch fortzugeben die ersten $k\sqrt{3}$ halben Differenzen entsprechender Glieder nach und vor dem Ausrufungszeichen. Dagegen würde sich nun die Bedeutung des ersten complexen Ausdrucks so angeben lassen: Nachdem man die k Glieder vor dem Strich fortgegeben, hat man die ersten $k\sqrt{3}$ halben Differenzen entsprechender Glieder vor und nach dem Zeichen zu nehmen.

Anmerkung. Wir können das Ausrufungszeichen auch mit Vortheil bei den arithmetischen Reihen der ersten Ordnung anwenden; thaten wir es früher nicht, so geschah es nur deswegen, weil dort die entsprechenden Glieder, absolut genommen, stets gleich sind und nur verschiedene Zeichen haben, und also die Einführung der halben Differenzen entsprechender Glieder damals als etwas überflüssiges hätte erscheinen können. Jetzt aber kommt dadurch in unsre ganze Darstellung erst Zusammenhang.

Bei fallenden Reihen erster Ordnung war $n = p \pm q$ oder $n = p \pm i.\,q$, je nachdem die vorgelegte Summe größer oder kleiner als das Minimum war. Hat man dem rationalen Theile dieser Ausdrücke genügt, d. h. hat man p Glieder genommen und hinter das letzte genommene Glied das Ausrufungszeichen gesetzt, so muß man, wenn $n = p \pm q$ ist, noch dazu neh-

men die ersten q halben Differenzen entsprechender Glieder nach und vor dem Zeichen oder fortgeben die ersten q halben Differenzen entsprechender Glieder vor und nach dem Zeichen. Ist aber $n = p \pm i.\ q$, so hat man auch erst p Glieder zu nehmen, dann aber, was wir früher dazu nahmen, fortzugeben, und was wir früher fortgaben, zuzulegen.

Bei steigenden Reihen erster Ordnung war, wie aus der 6ten Aufgabe bekannt ist, entweder $n = -p \pm q$ oder $n = -p \pm i.\ q$, je nachdem die vorgelegte Summe kleiner oder größer als das Maximum war. Hier hat man zunächst p Glieder vor dem Striche fortzugeben, dann das Ausrufungszeichen zu setzen, und im ersten Falle entweder die ersten q halben Differenzen entsprechender Glieder nach und vor dem Zeichen zu nehmen, oder die Summe der ersten q halben Differenzen entsprechender Glieder vor und nach dem Zeichen auch noch fortzugeben; im andern Falle hat man wieder erst die p Glieder vor dem Striche fortzugeben, im Uebrigen aber umgekehrt zu verfahren.

§ 17.

8te Aufgabe (Vorbereitung für die folgende). Es liegt die Reihe vor:

— 2, 22, 40, 52, 58, | 58, 52, 40, 22, — 2, — 32, — 68, — 110, — 158, — 212.

in welcher $a = 58$, $d = e = -6$ ist. Man hat von derselben $-2k$ Glieder genommen d. h. die $2k$ Glieder, die dem ersten Gliede vorangehen, weggegeben und dadurch eine gewisse positive Summe S erlangt, welche größer ist, als sämmtliche positive Glieder vor oder nach dem Strich. Man will zu der nämlichen Summe auf folgende Art gelangen: Man will die ersten k Glieder nehmen, dann die Hälften der folgenden y Glieder weggeben und die Hälften der vorigen y Glieder wieder zulegen. Wie groß ist y?

Auflösung. Die Summe der ersten k Glieder ist

$$s = a\,k + \frac{k.\,(k^2 - 1)}{6}\,.\,e$$

Nun ist das erste Glied der folgenden y Glieder

$a_1 = a + \frac{(k+1).\,k.}{2}\,e$; das erste Glied der Differenzenreihe

$d_1 = (k+1)\,e$, und die constante Differenz der Differenzenreihe $e_1 = e$.

Demnach ist die Summe der folgenden y Glieder

$$s_1 = a\,y + \frac{(k+1).\,k.}{2}\,e.\,y + (k+1).\,e\,\frac{y.\,(y-1)}{2} + \frac{y.\,(y-1)\,(y-2).}{6}\,e$$

Ferner haben wir die Summe der vorigen y Glieder (s^1) zu bestimmen, d. h. derjenigen y Glieder, welche den eben besprochenen folgenden vorangehen, mit andern Worten: von den ersten k Gliedern die letzten y. Zu diesem Zwecke sehen wir das letzte der ersten k Glieder als das erste der sogenannten vorigen an und bezeichnen es mit a^1, das erste Glied der Differenzenreihe mit d^1 und die constante zweite Differenz mit e^1. Es ist dann:

$a^1 = a + \frac{k.\,(k-1)}{2}\,e$, $d^1 = -(k-1).\,e$, $e^1 = e$. Demnach ist

$$s^1 = a\,y + \frac{(k-1)\,k.}{2}\,e.\,y. - \frac{y.\,(y-1)}{2}\,(k-1).\,e + \frac{y.\,(y-1)\,(y-2).}{6}\,e,$$

Also ist

$$s^1 - s_1 = -k.e\,y - y.(y-1)\,k\,e = -k.e.y^2$$

und $\frac{s^1 - s_1}{2} = -\frac{k.e.y^2}{2}$.

Nun sollte $s + \frac{s^1 - s_1}{2} = S$ sein, es soll also

$$a\,k + \frac{k.(k^2-1).e}{6} - \frac{k.e.y^2}{2} = S \text{ sein.}$$

Demnach ist

$$y = \pm\sqrt{\left[a\,k + \frac{k.(k^2-1)}{6}.e - S\right].\frac{2}{k.e}}$$

Da aber unter S die Summe von — 2 k Gliedern verstanden wird, so kann gesetzt werden $S = -2\,a\,k - \frac{2\,k\,(4\,k^2-1)}{6}.e$, dadurch erhält man

$$y = \pm\sqrt{3\,k^2 + \frac{6\,a}{e} - 1}$$

Anmerkung. Ich darf wohl nicht erst erwähnen, daß man zu dem Resultate $\frac{s^1 - s_1}{2} = -\frac{k.e.y^2}{2}$ auf kürzerm Wege hätte gelangen können, wenn man wieder die halben Differenzen entsprechender Glieder in Betrachtung gezogen hätte; sie bilden eine arithmetische Reihe erster Ordnung, deren erstes Glied $\alpha = \frac{a^1 - a_1}{2} = -\frac{k\,e}{2}$ und deren Unterschied $\delta = \frac{d' - d_1}{2} = -k.e = 2\,\alpha$ ist. Von dieser Reihe hat man y Glieder zu nehmen dies giebt

$$\sigma = \alpha\,y^2 = -\frac{k.e}{2}.y^2.$$

Beispiel. Es sei $a = 58$, $d = e = -6$, $S = 410$, also $2\,k = 10$ dann ist $k = 5$ und $y = \pm 4$.

Und es ist wirklich, was $y = +4$ anbelangt,

$$58 + 52 + 40 + 22 - 2 + \frac{32 + 68 + 110 + 158 - 2 + 22 + 40 + 52}{2}$$

$$= 170 + 240 = 410,$$

so wie auch in Beziehung auf $y = -4$

$$170 - \frac{(-32 - 68 - 110 - 158) - (-2 + 22 + 40 + 52)}{2} = 410.$$

§ 18.

9te Aufgabe. Man hat eine Reihe vor Augen, in welcher $a = 58$, $d = e = -6$ ist, und wirft die Frage auf, wie viel Glieder zu nehmen sind, damit die Summe $S = 410$ entsteht welche größer ist als die Summe der positiven Glieder nach dem Strich?

Auflösung. Wenn man die Anzahl der zu nehmenden Glieder mit x bezeichnet, so erhält man durch die Summenformel zur Bestimmung von x folgende Gleichung:

Digitized by Google

$$x^3 - \left(-\frac{6\,a}{e} + 1\right) x - \frac{6.\,S}{e} = 0$$

Nach der über S gemachten Voraussetzung kann x keine positive Zahl sein, gesetzt es finde sich $x = -2\,k$. Dann ist $S = -2\,a\,k - 2\,k.\,(4\,k^2 - 1).\,\frac{e}{6}$, dadurch geht unsre kubische Gleichung in folgende über: $x^3 - \left(-\frac{6\,a}{e} + 1\right) x + \left(\frac{12\,a\,k}{e} + 8\,k^3 - 2\,k\right) = 0$.

Aus dem von x unabhängigem Theile läßt sich schließen, daß das Produkt der beiden noch übrigen Wurzeln $x' \,.\, x'' = \frac{6\,a}{e} + 4\,k^2 - 1$ ist, auch ist leicht zu sehen, daß ihre Summe $x' + x'' = 2\,k$ ist. Folglich ist

$$x' = k + \sqrt{-3\,k^2 - \frac{6\,a}{e} + 1} = k + i\sqrt{3\,k^2 + \frac{6\,a}{e} - 1} = k + i.\,y$$

$$x'' = k - \sqrt{-3\,k^2 - \frac{6\,a}{e} + 1} = k - i\sqrt{3\,k^2 + \frac{6\,a}{e} - 1} = k - i.\,y$$

Es läßt sich nämlich leicht zeigen, daß $3\,k^2 > -\frac{6\,a}{e} + 1$ ist.

Denn wenn S nur gleich wäre der Summe sämmtlicher positiven Glieder nach dem Striche, oder genauer gesprochen, wenn S nur gleich dem Maximum der Reihe $= M$ wäre, so wäre $x = \sqrt{\frac{-\frac{6\,a}{e} + 1}{3}} = K$, was aus unsrer Gleichung für x entweder durch Differentiation oder aus der Cardanischen Formel gefunden werden kann. Außer diesem Doppelwerthe $x = K$ hätte dann die Gleichung noch die Wurzel $x = -2\,K$; d. h. man müßte die 2 K Glieder, welche unmittelbar vor dem Striche stehen, weggeben, um zur Summe M zu gelangen. Da wir aber durchs Weggeben von 2 k Gliedern vor dem Striche zu der größern Summe S gelangt sind, so ist klar, daß $2\,k > 2\,K$, und $k > \sqrt{\frac{-\frac{6\,a}{e} + 1}{3}}$, also $3\,k^2 > -\frac{6\,a}{e} + 1$ ist; w. z. b. w.

Durch diesen Nachweis ist die Einführung des Imaginären in den Ausdrücken für x' und x'' gerechtfertigt. Und seine Deutung? Sie lautet: Nachdem man k Glieder der Reihe genommen u. nach dem kten Gliede das Ausrufungszeichen gesetzt hat, nehme man noch die ersten y halben Differenzen entsprechender Glieder vor und nach dem Ausrufungszeichen, oder gebe die Summe von y Halb-Differenzen entsprechender Glieder nach und vor dem Zeichen, wobei $y = \sqrt{3\,k^2 + \frac{6\,a}{e} - 1}$ ist. In beiden Fällen wird man zu der nämlichen, das Maximum überbietenden Summe S gelangen, welche das Weggeben von gewissen 2 k Gliedern hervorbringt.

Beispiel. Aus $x^3 - 59\,x + 410 = 0$ folgt $x = -10$, $x' = 5 + 4\,i$, $x'' = 5 - 4.\,i$.

1) Rechtfertigung von $x = -10$. Es ist:

$$-58 - 52 - 40 - 22 + 2 + 32 + 68 + 110 + 158 + 212 = 410.$$

2) Rechtfertigung von $x' = 5 + 4.\ i$. Es iſt:

$$58 + 52 + 40 + 22 + - 2 - (- 15 - 45 - 75 - 105) = 70 - (- 240) = 410.$$

3) Rechtfertigung von $x'' = 5 - 4\ i$. Es iſt:

$$170 + (15 + 45 + 75 + 105) = 170 + 240 = 410.$$

§ 19.

10te Aufgabe. (Vorbereitung für die folgende.) In der fallenden Reihe:

. . . 65, 77, 83, | 83, 77, 65, 47, 23, — 7, — 43, — 85, — 133, — 187 . . . .

deren erſtes Glied $a = 83$, und deren $d = e = - 6$ iſt, hatte man $2\,k$ Glieder vor dem Striche fortgegeben und dadurch eine poſitive Summe S erlangt, welche kleiner iſt als das Maximum der Reihe. Man will zu der nämlichen Summe auf folgende Art gelangen: Man will erſt k Glieder (nach dem Strich) nehmen, dann auch noch die folgenden y Glieder dazu nehmen oder die vorigen y entſprechenden Glieder weggeben. Wie groß iſt y?

Auflöſung. Das $(k + 1)$ſte Glied dieſer Reihe, oder das erſte Glied der ſogenannten folgenden Glieder iſt $a_1 = a + \frac{(k + 1)\,k}{2}.\ e$, ferner iſt bei dieſen folgenden Gliedern $d = (k + 1).\ e,\quad e_1 = e.$

Ebenſo iſt das erſte Glied der ſogenannten entſprechenden vorigen Glieder $a' = a + \frac{k.\,(k - 1).\ e}{2}$,

ferner iſt bei dieſen vorigen Gliedern $d' = - (k - 1)\ e,\quad e' = e.$

Demnach iſt die Summe von y ſogenannten folgenden Gliedern

$$s_1 = a\,y + \frac{(k + 1)\,k.\ e.\ y}{2} + (k + 1)\ e.\ \frac{y.\,(y - 1)}{2} + \frac{y.\,(y - 1).\,(y - 2).\ e}{6}$$

und die Summe von y ſogenannten entſprechenden vorigen Gliedern

$$s' = a\,y + \frac{(k - 1)\,k.\ e.\ y}{2} - (k - 1).\ \frac{e.\ y.\,(y - 1)}{2} + \frac{y.\,(y - 1).\,(y - 2).\ e}{6}$$

Da nun der Aufgabe gemäß

$$s + s_1 = s - s_1 = S$$

ſein ſoll, ſo muß $s_1 + s' = 0$ ſein.

Demnach erhalten wir zur Beſtimmung von y folgende Gleichung:

$$2\,a\,y + k^2.\ e\,y + e\,y\,(y - 1) + \frac{y.\,(y - 1)\,(y - 2).\ e}{3} = 0, \text{ oder}$$

$$\left[2\,a + k^2\ e + \frac{e.\,(y^2 - 1)}{3}\right].\ y = 0.$$

Nur wenn $S =$ dem Maximum der Reihe $= M$ wäre, könnte $y = 0$ ſein, da aber in dieſer Aufgabe ausdrücklich angenommen iſt, daß $S < M$ ſein ſoll, ſo kann auch y nicht $= 0$ ſein.

Demgemäß muß der andre Factor $2\,a + k^2\ e + \frac{e.\,(y^2 - 1)}{3} = 0$ ſein und alſo

$$y = \pm \sqrt{- 3\,k^2 - \frac{6\,a}{e} + 1}$$

Wir wiſſen ſchon, daß wenn $S = M$ iſt, dann $3\,k^2 = - \frac{6\,a}{e} + 1$ iſt, auch daß

$3\,k^2 > -\frac{6\,a}{e} + 1$ ist, wenn $S > M$ gesetzt wird, da wir aber gegenwärtig annehmen, daß $S < M$ ist, so muß $3\,k^2 < -\frac{6\,a}{e} + 1$ sein, demnach ist das, was unter dem Wurzelzeichen steht, positiv und y reell. Wir werden also die uns gestellte Aufgabe lösen können, ohne das Gebiet des Imaginären betreten zu dürfen.

Anmerkung. Aus $s_1 + s' = 0$ folgt $s_1 = -s'$ und $s' = -s_1$. Nun ist

$$s_1 = \frac{s_1 + s_1}{2} = \frac{s_1 - s'}{2}, \text{ ebenso } s' = \frac{s' + s'}{2} = \frac{s' - s_1}{2}$$

Folglich ist $S = s + \frac{s_1 - s'}{2}$, aber auch $S = s - \frac{s' - s_1}{2}$.

Nach diesen Bemerkungen werden wir jetzt y noch auf eine andre Weise finden können. Es stellt nämlich $\frac{s_1 - s'}{2} = \sigma$ die Summe von y Gliedern einer arithmetischen Reihe erster Ordnung dar, deren erstes Glied $\alpha = \frac{s_1 - s'}{2} = \frac{k.\,e}{2}$ und deren Differenz $\delta = 2\,\alpha = k.\,e$ ist. Es ist also

$$\sigma = \alpha\,y^2 = \frac{k.\,e}{2}\,y^2.$$

Aber der Aufgabe zufolge soll $s + \sigma = S$ sein.

Da nun $s = a\,k + \frac{k.\,(k^2 - 1)}{6}.\,e$ und $S = -2\,a\,k - \frac{2\,k.\,(4\,k^2 - 1)}{6}.\,e$ ist, so ergiebt sich auch hieraus

$$y = \pm\sqrt{-3\,k^2 - \frac{6\,a}{e} + 1}$$

Um die Vergleichung mit den beiden vorigen Aufgaben zu erleichtern, könnten wir jetzt auch die gegenwärtige Aufgabe so stellen: Man will zu der Summe S, kleiner als M und hervorgegangen durch das Weggeben von 2 k Gliedern vor dem Striche dadurch gelangen daß man die ersten k Glieder nach dem Striche nimmt, und dann noch dazunimmt die ersten y Halb-Differenzen entsprechender Glieder *nach und vor* dem Zeichen, oder fortgiebt die ersten y Halb-Differenzen entsprechender Glieder *vor und nach* dem Zeichen.

Beispiel. In der diesmal vorgelegten Reihe ist $a = 83$, $d = e = -6$ und es sei $S = 160$. Dann ist $2\,k = 10$, $k = 5$ und $y = \pm 3$.

Es ist $s = 295$, $s_1 = -135$, $s' = +135$, also $s + s_1 = 160$. auch $s - s' = 160$.

Natürlich ist auch: $83 + 77 + 65 + 47 + 23 + \frac{(-7 - 43 - 85) - (23 + 47 + 65)}{2}$

$= 160$, so wie auch $295 - \frac{(23 + 47 + 65) - (-7 - 43 - 85)}{2} = 160$ ist.

Auch kann man so schreiben: $295 + \left(\frac{-7 - 23}{2} + \frac{-43 - 47}{2} + \frac{-85 - 65}{2}\right) = 160$

$$295 - \left(\frac{23 + 7}{2} + \frac{47 + 43}{2} + \frac{65 + 85}{2}\right) = 160.$$

Digitized by Google

§ 20.

11te Aufgabe. In einer Reihe ist a, d, e und S gegeben und zwar $d = e$ und außerdem bekannt, daß die Reihe ein Maximum hat und daß S kleiner als dieses Maximum ist. Man sucht die Anzahl der Glieder x.

Auflösung. Das x muß aus folgender Gleichung gefunden werden:

$$x^3 - \left(-\frac{6\,a}{e} + 1\right) x - \frac{6.\,S}{e} = 0$$

Da $S < M$ ist, und ich M erhalte, wenn ich $K = \sqrt{\frac{-\frac{6\,a}{e} + 1}{3}}$ Glieder der Reihe nehme, so ist von vorne herein einzusehen, daß die Gleichung zwei positive Wurzeln v und w haben muß, von denen die eine (v) kleiner, die andre (w) größer als K sein muß. Auch folgt aus dem Umstande, daß die Reihe vor und nach dem Strich identisch ist, daß ich auch zu der verlangten Summe S gelangen werde, wenn ich von den Gliedern vor dem Striche eine gewisse Anzahl weggebe, und zwar mehr als w; die Gleichung hat also auch eine negative Wurzel, deren absoluter Werth größer als w ist. Beachte ich nun noch daß in der Gleichung das von x^2 abhängige zweite Glied fehlt, so erkenne ich, daß diese dritte Wurzel der Gleichung $= -(v + w)$ sein muß.

Ich nehme an, daß ich diese dritte negative Wurzel zuerst gefunden habe, etwa durch die Cardanische Formel unter der Gestalt: $x = m + n$, wo ich hinterdrein gewahr werde, daß $m = -k + i.\,l$ und $n = -k - i.\,l$ ist, kurz, ich setze voraus, daß $x = -2k$ bereits gefunden ist. Dann ist

$$S = -2\,a\,k - \frac{2\,k.\,(4\,k^2 - 1)}{6}.\,e$$ und unsre kubische Gleichung erhält folgende Form:

$$x^3 - \left(-\frac{6\,a}{e} + 1\right) x + \left(\frac{12\,a\,k}{e} + 8\,k^3 - 2\,k\right) = 0$$

Aus dem letzten eingeklammerten Gliede ersehen wir, daß das Produkt der beiden andern Wurzeln

$$x'.\,x'' = \frac{6\,a}{e} + 4\,k^2 - 1 \text{ ist.}$$

Nun sei $x' = k + y$, $x'' = k - y$. Demnach ist

$$k^2 - y^2 = \frac{6\,a}{e} + 4\,k^2 - 1 \text{ und}$$

$$y = \pm\sqrt{-3\,k^2 - \frac{6\,a}{e} + 1}$$

Also ist $x' = w = k + \sqrt{-3\,k^2 - \frac{6\,a}{e} + 1}$

$$x'' = v = k - \sqrt{-3\,k^2 - \frac{6\,a}{e} + 1}$$

Digitized by Google

Anmerkung. Aus $x = m + n = -2k$ folgt bekanntlich auch, daß

$$x' = -\frac{m+n}{2} + \frac{m-n}{2} i\sqrt{3} = k + l.\sqrt{3},$$

$$x'' = -\frac{m+n}{2} - \frac{m-n}{2} i\sqrt{3} = k - l.\sqrt{3} \text{ ist.}$$

Also ist $y^2 = 3.l^2$.

Beispiel. $a = 83$, $d = e = -6$, $S = 160$. Aus $x^3 - 84x + 160 =$ folgt dann $x = -10$, $x' = 5 + 3 = 8$, $x'' = 5 - 3 = 2$ ist.

Ueber die Deutung dieser drei Wurzeln darf ich wohl nach den gemachten Vorbereitungen kein Wort verlieren. Man wird zugeben, daß sie, theoretisch betrachtet, alle drei gleich berechtigt sind.

§ 21.

Auch könnte ich die Betrachtung solcher Reihen zweiter Ordnung, welche ein Minimum haben, dem Leser selbst überlassen, er dürfte ja nur sämmtliche Glieder der beiden zuletzt dargelegten Reihen mit dem entgegengesetzten Zeichen schreiben. Doch will ich seiner Prüfung ein Paar andere Beispiele unterbreiten, ohne ihm dabei mit Erläuterungen weiter lästig zu werden.

12te Aufgabe. $a = -65$, $d = e = 6$; $S = 340$.

Aus $x^3 - 66x - 340 = 0$ folgt $x = 10$, aber auch $x = -5 \pm 3i$.

Die Reihe heißt

$$\ldots -47, -59, -65 \,|\, -65, -59, -47, -29, -5, +25, +61, +103, +151, +205 \ldots$$

Deutung des compleren Ausdrucks:

$$65 + 59 + 47 + 29 + 5 + \frac{(25 + 61 + 103) + (5 + 29 + 47)}{2} = 205 + 135 = 340.$$

13te Aufgabe. $a = -25$, $d = e = 6$; $S = 60$.

Aus $x^3 - 26x - 60 = 0$ folgt $x = 6$, aber auch $= -3 \pm i$.

Die Reihe heißt nämlich:

$$\ldots -7, -19, -25 \,|\, -25, -19, -7, +11, +35, +65 \ldots$$

Deutung des imaginären Ausdrucks:

$$25 + 19 + 7 + \frac{11 + 7}{2} = 51 + 9 = 60$$

14te Aufgabe. $a = -5$, $d = e = 3$; $S = 10$.

Aus $x^3 - 11x - 20 = 0$ folgt $x = 4$ und $x = -2 \pm$

15te Aufgabe. $a = -11$, $d = e = 3$; $S = 164$.

Aus $x^3 - 23x - 328 = 0$ folgt $x = 8$, auch $x = -4 \pm 5$.

Die Reihe heißt:

$$\ldots\ldots -8, -11 \,|\, -11, -8, -2, +7, +19, +34, +52, +73, +97 \ldots$$

Deutung von $-4 + 5i$

$$11 + 8 + 2 - 7 + \frac{(19 + 34 + 52 + 73 + 97) - (7 - 2 - 8 - 11 - 11)}{2} =$$

$$14 + \frac{275 + 25}{2} = 164.$$

Digitized by Google

16te Aufgabe. $a = -29\frac{1}{2}$, $d = e = 6$; $S = 129\frac{1}{2}$.

Aus $x^3 - 30\frac{1}{2}\,x - 129\frac{1}{2} = 0$ folgt $x = 7$, aber auch $x = -3\frac{1}{2} \pm 2\frac{1}{2}.\,i$.

Die Reihe nebst der hier in Betracht kommenden, etwa aus der Summenformel zu construirenden Nebenreihe lautet:

$$\ldots\ldots \left| -14\tfrac{3}{8},\ -15\tfrac{1}{8} \right\| \underbrace{-15\tfrac{1}{8},\ -14\tfrac{3}{8}}_{-29\frac{1}{2}} \left| \underbrace{-12\tfrac{7}{8},\ -10\tfrac{5}{8}}_{-23\frac{1}{2}} \right| \underbrace{-7\tfrac{5}{8},\ -3\tfrac{7}{8}}_{-11\frac{1}{2}} \left|$$

$$+\underbrace{\tfrac{5}{8},\ 5\tfrac{7}{8}}_{6\frac{1}{2}} \left| \underbrace{11\tfrac{7}{8},\ 18\tfrac{5}{8}}_{30\frac{1}{2}} \right| \underbrace{26\tfrac{1}{8},\ 34\tfrac{3}{8}}_{60\frac{1}{2}} \left| \underset{96\frac{1}{2}}{\ldots\ldots} \right.$$

Deutung des Ausdrucks $-3\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}.\,i$.

$$29\tfrac{1}{2} + 23\tfrac{1}{2} + 11\tfrac{1}{2} - \tfrac{5}{8} + \frac{(5\frac{7}{8} + 30\frac{1}{2} + 60\frac{1}{2}) - (\frac{5}{8} - 11\frac{1}{2} - 23\frac{1}{2})}{2} =$$

$$63\tfrac{7}{8} + \frac{96\frac{7}{8} + 34\frac{3}{8}}{2} = 63\tfrac{7}{8} + 65\tfrac{5}{8} = 129\tfrac{1}{2}.$$

§ 22.

Nachdem wir von der 8ten Aufgabe ab uns mit Reihen zweiter Ordnung beschäftigt haben, bei welchen ein Maximum oder Minimum stattfindet, wollen wir, wie bei der 6ten und 7ten Aufgabe, Reihen aufstellen, die kein Maximum oder Minimum zulassen, die aber nicht auf reine kubische Gleichungen führen. Doch sei zunächst noch $d = e$. Wir werden also in den nächsten Aufgaben annehmen, daß der Ausdruck $K = \sqrt{\dfrac{-\frac{6a}{e} + 1}{3}}$ imaginär ist. Dies setzt voraus, daß die Vorzeichen von a und e dieselben sind, und daß, absolut genommen, $a > \frac{e}{6}$ ist.

17te Aufgabe. Man giebt uns die Reihe

$$\ldots 19,\ 10,\ 4,\ 1 \mid 1,\ 4\ \ 10,\ 19 \ldots$$

in welcher $a = 1$, $d = e = 3$ ist, und es soll angegeben werden, wieviel Glieder derselben zu nehmen sind, damit die Summe $S = 5$ werde. Dies führt auf folgende Gleichung

$$x^3 + x - 10 = 0.$$

aus welcher $x = 2$, aber auch $x = -1 \pm 2.\,i$ hervorgeht.

Deutung. Es ist nicht bloß $1 + 4 = 5$, sondern auch $-1 + \dfrac{(4 + 10) - (1 + 1)}{2}$ $= -1 + 6 = 5$.

Anmerkung. Diese Gleichung $x^3 + x - 10 = 0$ giebt Prof. Dr. Schmeißer, einem entschiedenen Gegner alles Negativen und Imaginären, in seiner Schrift: Kritische Betrachtung einiger Lehren der reinen Analysis, welchen der Vorwurf der Ungereimtheit gemacht worden ist, Frankfurt a. d. O., 1846, pag. 9 und 10 Veranlassung, die Cardanische Formel selbst in dem Falle als ganz nutzlos und ganz unbrauchbar zu bezeichnen, wenn sie eine positive Wurzel angiebt. Er findet nämlich nach dieser Formel $x = 2{,}1537 \ldots + 0{,}21179 = 2{,}36549$. „Also

Digitized by Google

ein falſches Reſultat," ruft er aus. Glücklicher Weiſe hat dieſelbe Gleichung Fiſcher in ſeiner Algebra pag. 125 ſchon 1829 nach derſelben Formel berechnet, er findet

$$x = 2{,}15470 - 0{,}15468 = 2{,}00002 = 2.$$

Alſo das richtige Reſultat! — — .

18te Aufgabe. $a = 1,\ d = e = 3;\ S = -5.$

Aus $x^3 + x + 10 = o$ folgt $x = -2$ und $x = 1 \pm 2\,i.$

19te Aufgabe. $a = -1\ \ d = e = -3;\ S = 5.$

Auch hier iſt $x = -2$ oder $= 1 \pm 2\,i.$

§ 23.

Der Vollſtändigkeit wegen wird noch die Aufſtellung einer Reihe nöthig ſein, in welcher d nicht $= e$ iſt. Die Summenformel führt dann auf folgende nach Potenzen der Gliederzahl n geordneten Gleichung:

$$n^3 + 3.\left(\frac{d}{e} - 1\right) n^2 + \left(\frac{6\,a}{e} - \frac{3\,d}{e} + 2\right) n + \frac{6.\,S}{e} = 0$$

20ſte Aufgabe. Es ſei $a = 44,\ d = -15,\ e = 3;\ S = 125.$

Aus $x^3 - 18\,x^2 + 105\,x - 250 = o$ folgt $x = 10,\ x' = 4 + 3.\,i,\ x'' = 4 - 3.\,i.$

Die Reihe lautet:

44, 29, 17, 8, 2, — 1, — 1, + 2, 8, 17 . . . .

Deutung der imaginären Wurzel.

$$44 + 29 + 17 + 8 - \frac{2 - 1 - 1}{2} + \frac{8 + 17 + 29}{2} = 98 - 0 + 27 = 125.$$

Anmerkung. Hätten wir die vorliegende Gleichung reducirt, indem wir $x = y + 6$ annehmen, ſo wäre folgende kubiſche Gleichung aufzulöſen geweſen:

$$y^3 - 3\,y - 52 = o$$

wobei $y = 4$ und auch $= -2 \pm 3\,i$ ſich ergeben hätte.

Dies verglichen mit $n^3 + \left(\frac{6\,a}{e} - 1\right) n - \frac{6.\,S}{e} = o$ kann unter andern geben:

$a = -1,\ d = e = 3,\ S = 26,$ welche Werthe auf die vorige Reihe zurückführen, nur daß der Strich hinter das 6te Glied zu ſetzen iſt.

§ 24.

Das Reſultat unſrer Unterſuchungen läßt ſich jetzt in folgende wenige Worte zuſammenfaſſen: Wenn bei einer arithmetiſchen Reihe zweiter Ordnung a, d, e und S gegeben ſind und man findet die dazu gehörige Anzahl der Glieder

$$n = \pm p \pm q\,i\,,$$

ſo hat man zunächſt p Glieder der Reihe zu nehmen oder die vor dem erſten Gliede befindlichen p Glieder zu geben, dann zu geben q Halbdifferenzen entſprechender Glieder nach und vor dem Ausrufungszeichen, oder zu nehmen q Halbdifferenzen entſprechender Glieder vor und nach dem Zeichen.

Dieſelbe Regel gilt für arithmetiſche Reihen erſter Ordnung, bei welchen $e = o$ iſt, ja auch für Reihen 0ter Ordnung; da bei den letztern außerdem noch $d = o$ iſt, ſo verſchwinden hier natürlich die Halbdifferenzen.

Digitized by Google

C. Anwendung der Reihen.

§ 25.

21ste Aufgabe. Ein Dieb entflieht und macht täglich $\alpha = 3$ Meilen, t Tage später setzt ihm Jemand nach und macht den ersten Tag $a = 8$ Meilen, jeden folgenden Tag eine Meile $= d$ weniger, als am vorhergehenden. Wann wird der Dieb eingeholt sein?

$$\text{Antw. } x = \frac{2a - 2\alpha + d}{2d} \pm \sqrt{\left(\frac{2a - 2\alpha + d}{2d}\right)^2 - \frac{2\alpha t}{d}}$$

Setzt man $t = 4\frac{7}{8}$, so ist $x = 5\frac{1}{2} \pm 1\frac{1}{2} = 7$ oder 4.

Sollte also der Dieb nach vier Tagen sich unsichtbar gemacht haben, so könnte er noch nach 7 Tagen, drei Tage später eingefangen werden. Hiebei ist nichts unklar.

Aber man nehme $t = 5\frac{5}{12}$, dann erhält man

$$x = 5\frac{1}{2} \pm 1\frac{1}{2}\,i.$$

Wie wird man dieses zu deuten haben? Die anfängliche Distanz ist $16\frac{1}{4}$ Meilen, nach einem Tage ist sie $11\frac{1}{4}$ Meilen, nach 2 Tagen $7\frac{1}{4}$, nach 3 Tagen $4\frac{1}{4}$, nach 4 Tagen $2\frac{1}{4}$, nach 5 Tagen $1\frac{1}{4}$, nach 6 Tagen bleibt sie $1\frac{1}{4}$ Meilen, von nun an wächst die Distanz, so daß nicht abzusehen ist, wie der Dieb eingeholt werden kann; man wird daher sagen können, es sei unter diesen Umständen unmöglich den Dieb einzuholen, und der gefundene Ausdruck enthält ja auch den Stempel der Unmöglichkeit. Aber der Ausdruck $x = 5\frac{1}{2} \pm 1\frac{1}{2}\,i$ sagt uns nicht bloß, daß die Ausführung unmöglich ist, sondern auch, wie die Ausführung unsers Vorhabens mit der möglichst mindesten Modification, also *mutatis mutandis*, dennoch zu bewerkstelligen ist. Wir hörten schon, daß die Distanz nach 5 Tagen noch $1\frac{1}{4}$ Meilen betrug; der Nachsetzende gehe noch einen halben Tag nach Vorschrift (§ 11), nämlich $1\frac{3}{8} = 1\frac{5}{8}$ Meilen, da der Dieb aber an diesem wie an jedem halben Tage nur $1\frac{1}{2}$ Meilen macht, so ist ihm der Nachsetzende nach $5\frac{1}{2}$ Tagen noch um $\frac{1}{8}$ Meilen näher gerückt, so daß ihre Distanz nur noch $1\frac{1}{8}$ Meilen beträgt. Nun freilich muß eine Aenderung eintreten, wenn der Dieb eingeholt werden soll. Mit Bezug auf die in § 11 aufgestellte Nebenreihe mache der Nachsetzende in den nächsten drei Halbtagen noch folgende Wege:

$$(1\tfrac{3}{8} - 1\tfrac{1}{8}) : 2 = \tfrac{1}{8},\ (1\tfrac{5}{8} - \tfrac{9}{8}) : 2 = \tfrac{3}{8},\ (1\tfrac{7}{8} - \tfrac{3}{8}) : 2 = \tfrac{5}{8}$$

der Dieb aber

$$(1\tfrac{1}{2} - 1\tfrac{1}{2}) : 2 = 0,\ (1\tfrac{1}{2} - 1\tfrac{1}{2}) : 2 = 0,\ (1\tfrac{1}{2} - 1\tfrac{1}{2}) : 2 = 0.$$

Und so ist wirklich der Dieb nach $5\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}\,i$ Tagen, was hier so viel sagen will als nach 7 Tagen, eingeholt.

§ 26.

22ste Aufgabe. Zwei Körper A und B bewegen sich auf derselben geraden Linie nach derselben Richtung rechts hin. A, welcher täglich α Meilen macht, ist jetzt $i.\,\alpha$ Meilen von einem gewissen Orte C entfernt, B ist jetzt an diesem Orte und macht den ersten Tag a Meilen, den folgenden Tag d Meilen mehr, den nächsten $d + e$ Meilen mehr als den vorigen, und so beträgt der Zuwachs an Geschwindigkeit an jedem folgenden Tage e Meilen mehr als am vorigen. Wann wird der zweite Körper mit dem ersten zusammentreffen?

Auflösung. $x^3 + 3.\frac{d-e}{e}x^2 + \frac{6.(a-\alpha)-3d+2e}{e}x - \frac{6\alpha t}{e} = 0.$

1stes Beispiel. $\alpha = 20$, $t = 5$. $a = 1$, $d = e = 3$.

Reihe: 64, 46, 31, 19, 10, 4 1. | 1, 4, 10, 19, 31, 46, 64, 85.

Aus $x^3 - 39x - 200 = 0$ folgt $x = 8$, aber auch $x = -4 \pm 3.i$.

Deutung von -4 ± 3 i. Jetzt ist die Distanz 100 Meilen, vor einem Tage 81, vor 2 Tagen 65, vor 3 Tagen 55, vor 4 Tagen 54. Weil $\frac{31-19}{2} = 6$ und $\frac{20-20}{2} = 0$ ist, so war die Distanz noch einen Tag früher 48 Meilen; weil $\frac{46-10}{2} = 18$ und $\frac{20-20}{2} = 0$ ist, so war die Distanz wieder einen Tag früher 30 Meilen, und weil endlich $\frac{64-4}{2} = 30$ und $\frac{20-20}{2} = 0$ ist, so war die Distanz noch einen Tag früher $= 0$. Vor 7 Tagen waren die Körper zusammen an einem Orte, welcher 20 Meilen von C rechtshin entfernt liegt. Daselbst blieb A drei Tage ruhig liegen und bewegte sich dann rechts hin; B ging die ersten drei Tage rückwärts, links hin, und zwar 30 Meilen, 18 Meilen, 6 Meilen, und dann erst vorwärts 19 Meilen, 10 Meilen, 4 Meilen, 1 Meile ꝛc.

2tes Beispiel. $\alpha = 4$, $t = 5$, $a = -4$, $d = e = 1$.

Reihe. . . . 6, 2, — 1, — 3, — 4 | — 4, — 3, — 1, + 2, 6. 11, 17, 24 . . .

Aus $x^3 - 49x - 120 = 0$ folgt $x = 8$, aber auch $= -4 \pm 1$ also $x' = -5$, $x'' = -3$,

3tes Beispiel. $\alpha = 27$, $t = 5$, $a = -20\frac{1}{2}$, $d = e = 12$.

Reihe. . . . $159\frac{1}{2}$, $99\frac{1}{2}$, $51\frac{1}{2}$, $15\frac{1}{2}$, $-8\frac{1}{2}$, $-20\frac{1}{2}$ | $-20\frac{1}{2}$, $-8\frac{1}{2}$, $15\frac{1}{2}$, $51\frac{1}{2}$, $99\frac{1}{2}$, $159\frac{1}{2}$.

Aus $x^3 - 24\frac{3}{4}x - 67\frac{1}{2} = 0$ folgt $x = 6$, aber auch $x = -3 \pm 1\frac{1}{2}.i$.

Deutung von $-3 \pm 1\frac{1}{2}$. i. Vor drei Tagen war die Distanz noch $40\frac{1}{2}$ Meilen.

Nun ist $\frac{51\frac{1}{2}-15\frac{1}{2}}{2} = 18 = a$, $\frac{99\frac{1}{2}+8\frac{1}{2}}{2} = 54 = 3.a$, $\frac{159\frac{1}{2}+20\frac{1}{2}}{2} = 90 = 5.a$.

Man bilde daher eine Nebenreihe, deren zwei erste Glieder zusammen $= a$, deren beide folgende Glieder zusammen $= 3.a$, u. s. w. sind.

Die Nebenreihe lautet:

$$\frac{a}{4} = 4\frac{1}{2},\ \frac{3.a}{4} = 13\frac{1}{2},\ \frac{5.a}{4} = 22\frac{1}{2}, \text{ u. s. w.}$$

Der zweite Körper mache den Tag vor jenen drei Tagen 18 Meilen und in der Hälfte des vorigen Tages $22\frac{1}{2}$ Meilen. Wenn inzwischen der erste Körper an der Stelle geblieben ist, wo er vor drei Tagen war, weil $\left(\frac{27-27}{2} = 0,\ \frac{13\frac{1}{2}-13\frac{1}{2}}{2} = 0\right)$, so findet nun das Begegnen statt, denn es ist $18 + 22\frac{1}{2} = 40\frac{1}{2}$.

Digitized by Google

§ 27.

23ste Aufgabe. Der Körper A bewegt sich von einem gewissen Punkte C aus auf einer geraden Linie rechts hin, und zwar den ersten Tag α Meilen, jeden folgenden Tag δ Meilen mehr. (Genauer: er macht jeden folgenden Tag δ Meilen mehr als den vorigen, und ist nach t Tagen σ Meilen von C entfernt.) Nach t Tagen (nämlich setzt) befindet sich ein anderer Körper B in C, auch er bewegt sich rechtshin und macht den ersten Tag a Meilen, den zweiten Tag a + d Meilen, den dritten Tag a + 2 d + e, und so vergrößert sich der Zuwachs seiner Geschwindigkeit täglich um e. Wann wird er den ersten Körper eingeholt haben?

Auflösung. $x^3 + \frac{3.(d - e - \delta)}{e} x^2 + \frac{6}{e}\left(a - \alpha - \frac{d}{2} + \frac{e}{3} - t\delta + \frac{\delta}{2}\right) x - \frac{6}{e}\left(\alpha t. + \frac{\delta t.}{2}(t-1)\right) = 0.$

Beispiel. ($\alpha = 2$), $\delta = 4$, $\sigma = 200$, $t = 10$; $a = 4$, $d = 10$, $e = 6$.

Reihe für A, bei welchem $\alpha = 2$, $\delta = 4$ ist.

2, 6, 10, 14, 18, 22 | 26, 30, 34, 38; 42, 46, 50, 54, 58 62, 66, 70.

Reihe für B, bei welchem $a = 4$, $d = 10$, $e = 6$ ist.

. . . 102, 70, 44 | 24, 10, 2, 0 | 4, 14, 30, 52, 80, 114, 154, 200.

Aus $x^3 - 39x - 200 = 0$ folgt $x = 8$, aber auch $x = -4 \pm 3.i$.

Deutung von $x = -4 \pm 3.i$.

Jetzt ist die Distanz 200 Meilen, vor einem Tage war sie 162 (weil 38 — 0 = 38 ist), vor zwei Tagen 130, (weil 34 — 2 = 32 ist), vor drei Tagen 110, (weil 30 — 10 = 20 ist), vor vier Tagen 108, (weil 26 — 24 = 2 ist).

Soll die Entfernung noch kleiner gewesen sein, so müssen die Körper sich früher nach einem andern Gesetz bewegt haben. Es muß an den drei früheren Tagen A zurückgelegt haben

$\frac{26-22}{2} = 2$, $\frac{30-18}{2} = 6$, $\frac{34-14}{2} = 10$ Meilen (statt 22, 18, 14) und B

$\frac{24-44}{2} = -10$, $\frac{10-70}{2} = -30$, $\frac{2-102}{2} = -50$ Meilen (statt 44, 70, 102).

Weil nun $2 - (-10) = 12$, $6 - (-30) = 36$, $10 - (-50) = 60$ ist, so würde das heißen: vor fünf Tagen war die Distanz $108 - 12 = 96$ Meilen, vor sechs Tagen $96 - 36 = 60$ Meilen vor sieben Tagen $60 - 60 = 0$ Meilen so daß also vor sieben Tagen ein Zusammentreffen der Körper stattgefunden hätte, wenn sie sich in den drei ersten Tagen nach dem abgeänderten Gesetze bewegt hätten. — Und zwar würde dieses Zusammentreffen 54 Meilen rechts von C stattgefunden haben, A hätte sich nach diesem Zusammentreffen in den nächsten sieben Tagen von C weiter entfernt um 10, 6, 2; 26, 30, 34, 38 Meilen, B dagegen hätte in den drei ersten Tagen nach dem Begegnen erst rückwärts, links hin respective 50, 30, 10 Meilen gehen müssen, und dann erst in den folgenden vier Tagen vorwärts 24, 10, 2, 0 Meilen. Wer diese Probe weiter zu Ende führt, wird finden, daß die Körper nun wieder 200 Meilen entfernt sind, wie es der Aufgabe gemäß sein soll. Auch beachte man, daß man für die Rechnung in der Reihe für A als erstes Glied 42 anzusehen hat; um dies anzudeuten, ist in dieser Reihe vor 42 ein Semikolon gesetzt.

Digitized by Google

D. Anderweitige arithmetiſche Aufgaben.

§ 28.

24ſte Aufgabe. Dr. Schmeißer ſtellt in dem 1842 herausgekommenen Theile ſeiner ſchon citirten Schrift pag. 22 folgende Aufgabe: N kauft für 448 rtl. einiges Vieh. Hätte er für die nämliche Summe 4 Stück Vieh mehr bekommen, ſo hätte jedes Stück 2 rtl. weniger gekoſtet. Wie viel Stück waren es?

Antwort. + 28 Stück oder — 32 Stück.

„Was ſollen nun, ſagt Schmeißer dieſe 32 negativen Stücke? Darauf wird erwiedert, fährt er fort: Sie ſind das Ergebniß folgender Aufgabe: N verkauft für 448 rtl. Waare. Hätte er dafür 4 Stück weniger verkauft, ſo würde jedes Stück 2 rtl. theurer geworden ſein. Allein da dieſe Aufgabe gar nicht gegeben iſt, ſo iſt es nicht nur zweckwidrig, eine Antwort darauf zu geben, ſondern auch fehlerhaft, daß auf die wirkliche Aufgabe ein falſches Reſultat gegeben wird.“

So weit Schmeißer. Ich erkläre die negative Auflöſung folgender Maßen: Der Viehhändler bekommt Geld vom Fleiſcher, würde er dem Fleiſcher Geld geben, ſo würde man ſagen können: der Viehhändler bekommt negatives Geld (d. h. eine negative Anzahl von Thalern). Der Fleiſcher erhält für ſein Geld Schafe; würde er dem Viehhändler Schafe geben, ſo würde man ſagen: der Fleiſcher bekommt eine negative Anzahl Schafe. Wenn nun der Fleiſcher für 448 rtl. 28 Schafe bekommt, ſo ſagt Jeder: das Schaf koſtet 16 rtl.; und hätte er für ſein Geld 4 Schafe mehr bekommen, ſo hätte das Schaf nur 14 rtl. gekoſtet, alſo wäre es um 2 rtl. billiger geweſen. Erhält aber der Fleiſcher für ſein Geld — 32 Schafe, dann koſtet das Stück — 14 rtl., d. h. zu jedem Schaf, das er bekommt, erhält er noch 14 rtl. vom Viehhändler zu oder zu je 14 rtl., die er dem Viehhändler einhändigt, muß er noch ein Schaf hinzufügen; ein Fall, der allerdings ſo nicht vorkommen wird. Hätte nun der Fleiſcher für ſein Geld 4 Schafe mehr bekommen, d. h. hätte er 4 Schafe weniger geben dürfen, ſo hätte er außer dem Gelde nur 28 Schafe gegeben, oder — 28 Schafe für ſein Geld bekommen; das Schaf würde jetzt in der That — 16 rtl. gekoſtet haben, alſo wirklich 2 rtl. weniger als erſt; d. h. der Werth eines Schafes iſt jetzt noch um 2 rtl. geringer als erſt. Wer früher ein Schaf nahm, bekam nur 14 rtl. zu, wer jetzt ein Schaf nimmt, bekommt 16 rtl. zu; wer kann da leugnen, daß im letzten Fall der Werth eines Schafes um 2 rtl. geringer als früher iſt?

Man muß alſo zugeben, daß die negative Auflöſung nicht zu verwerfen iſt; es bedarf nur einer andern Einkleidung, um ſie annehmbar zu machen. Der größte Theil des Ungewöhnlichen der negativen Auflöſung fällt ſchon weg, wenn wir uns denken, daß der Fleiſcher für ſein Geld nicht Vieh nimmt, ſondern dem Viehhändler 32 Stück Vieh etwa zur Weide übergiebt. Nichts Ungewöhnliches aber wird man bei folgender Einkleidung derſelben Aufgabe finden:

Ich ſchicke mehrere Kinder in eine Schule für 448 rtl. jährlich. Hätte ich für das nämliche Geld nur 4 Kinder weniger ſchicken können, ſo wäre das jährliche Schulgeld um 2 rtl. höher geweſen. Wie viel Kinder waren es?

Antwort. + 32 Kinder, auch — 28 Kinder.

Digitized by Google

§ 29.

25ſte Aufgabe. Heis ſtellt in ſeiner Sammlung von Beiſpielen aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra, Köln, 1840, pag. 231 und 239 im Weſentlichen folgende Aufgabe:

Ein Waſſerbehälter erhält ſeinen Zufluß aus zwei Röhren und kann dadurch in 15 Stunden gefüllt werden. Soll aber der Behälter durch jede einzelne Röhre gefüllt werden, ſo erfordert die zweite 16 Stunden mehr als die erſte. In welcher Zeit wird er demnach durch die erſte gefüllt?

Antwort. In 24 Stunden, aber auch in — 10 Stunden.

Der negative Werth, ſagt Heis, hat keine Bedeutung.

Ich erkläre ihn ſo: Einen Behälter in — 10 Stunden füllen, heißt: in einer Stunde wird — $\frac{1}{10}$ deſſelben angefüllt, oder $\frac{1}{10}$ geleert, alſo in 10 Stunden kann durch die erſte Röhre das ganze Gefäß geleert werden. Vermittelſt der andern Röhre erfordert die Anfüllung des Gefäßes 16 Stunden mehr, alſo eine Zeit von 6 Stunden. Läßt man beide Röhren zugleich ihre Wirkſamkeit ausüben, ſo wird in einer Stunde $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$ des Gefäßes angefüllt, das Gefäß wird alſo in 15 Stunden voll ſein.

Soll die negative Auflöſung in den Vordergrund treten, ſo wird man die Aufgabe etwa ſo ſtellen:

Ein Waſſerbehälter hat eine Zuflußröhre und eine Abflußröhre. Als er leer war, öffnete man beide Röhren zugleich (ſo daß alſo durch die eine Waſſer zufloß und durch die andre Waſſer abfloß). Nach 15 Stunden war der Behälter voll. Darauf ſchloß man die Zuflußröhre, und als nun in Folge deſſen der Behälter leer war, ſchloß man die Abflußröhre, öffnete aber ſogleich die Zuflußröhre. Als nun der Behälter wieder voll war, waren ſeit dem Augenblick, da man die Zuflußröhre ſchloß, 16 Stunden verfloſſen. In wie viel Stunden kann der volle Behälter geleert werden, wenn man die Zuflußröhre verſchloſſen hält?

Antwort. In 10 Stunden, aber auch in — 24 Stunden.

§ 30.

26ſte Aufgabe. In Eulers Algebra pag. 111 findet ſich folgende Aufgabe: Es verbinden ſich einige Perſonen zu einer Geſellſchaft, und Jeder legt 10 mal ſo viel Gulden ein, als der Perſonen ſind, und mit dieſer Summe gewinnen ſie 6 p.C. mehr als ihrer ſind. Nun findet ſich's, daß der Gewinnſt zuſammen 392 fl. betrage. Wie viel ſind der Kaufleute geweſen?

Antwort. Euler giebt als Auflöſung nur 14 Perſonen an, aber aus der Gleichung: $x^3 + 6x^2 = 3920$ folgt außer $x = 14$, auch $x = -10 \pm 6.\sqrt{5}.i$.

$= -10 \pm 12.i$ (circa).

Daß beim Multiplicieren der Multiplicandus irgend eine benannte Größe ſein kann, weiß Jeder; poſitiv nennt man ſie, wenn ſie auf das gerade in Rede Stehende vortheilhaft einwirkt, negativ, wenn ihr Einfluß total nachtheilig iſt. Zwiſchen dieſen Grenzen liegen aber unzählig viele Abſtufungen, und zwar ſo, daß man ſich einen Uebergang von einer Stufe zur andern zu denken hat, wir dürfen aber in Bezug auf unſre Aufgabe nur noch zwei Situationen namhaft unterſcheiden. Wir nennen nämlich Größen, welche für den Augenblick auf unſer Vorhaben keinen Einfluß haben oder zu haben ſcheinen, imaginär; ſie liegen, wenn wir uns ſämmtliche Größen, die in irgend einer freundlichen oder feindlichen Beziehung zu unſerm Plane ſtehen, um den Mittel-

punkt eines Kreiſes als Radien gelagert denken, von beiden durch + und — bezeichneten diametral entgegengeſetzten Richtungen gleich weit ab, deshalb ſind ſie von Gauß vorzugsweiſe laterale Größen genannt worden. Sie ſind nicht unmöglich, nicht ohne Realität, nicht bedeutungslos, ſinnlos; ſie ſind den neutralen Mächten zu vergleichen, aus denen Freunde oder Feinde werden können und haben zunächſt ihre Bedeutung für ſich. Daher findet auch unter ihnen ſelber ein eben ſo ſtarker, alſo diametraler Gegenſatz ſtatt, wie zwiſchen den poſitiven und negativen Größen, und deshalb bezeichnet man die einen mit + i, die andern mit — i.

Vom Multiplicator iſt ebenſo bekannt, daß er eigentlich eine unbenannte Zahl ſein muß; er ſoll uns nur eine abſolute Zahl, z. B. 5 angeben, welche anzeigt, wie oft wir den in irgend einer Lage ſich befindlichen Multiplicandus zu nehmen haben. der Multiplicandus wird dadurch vergrößert oder nach Umſtänden verkleinert, behält aber ſeine Beziehung, ſeine Neigung, ich möchte ſagen, ſeinen Neigungswinkel gegen die Hauptrichtung unverändert bei. Da man aber ſtatt 5 etwa 8 — 3 ſchreiben kann, ſo wird nicht in Abrede zu ſtellen ſein, daß etwa mit — 3 multipliciren heißt, den Multiplicandus 3 mal fortgeben, wodurch ſeine Beziehung zur Hauptſache total umgeändert wird. Ich verwandle alſo durchs Multipliciren mit einer negativen Zahl den Multiplicandus ſeiner Qualität nach in ſein Gegentheil, ich mache dadurch aus einem Freunde einen Feind, aus einem Feinde einen Freund, aus einem, der mein Lager verlaſſen hatte und neutral geworden war, einen, der nun auch des Feindes Lager verläßt und abermals neutral wird. Da ferner $-1 = \sqrt{-1}.\sqrt{-1} = i.i$ iſt, ſo heißt mit einer imaginären Größe multipliciren, die Qualität des Multiplicandus nicht total verändern, ſondern bei dem Verändern auf halbem Wege ſtehen bleiben, denn erſt, wenn man den ſo veränderten, ich meine den mit i multiplicirten Multiplicandus abermals mit i multiplicirt, ſo ſchlägt er, der urſprüngliche Multiplicandus in ſein Gegentheil um. Heißt alſo mit + 1 multipliciren, die Beziehung, in welcher der fragliche Gegenſtand zu meinem Plane ſteht, nicht ändern, mit — 1 multipliciren, dieſe Beziehung in die entgegengeſetzte verwandeln; ſo kann naturgemäß mit + i multipliciren, nichts anderes bedeuten, als die vorhandene Beziehung einer Größe zur Hauptſache durch Vorwärtsgehen in der Art ändern, daß ihre neue Beziehung gegen ihre vorige ſich in einem neutralen Zuſtande befindet, ſo wie mit — i multipliciren nichts anderes heißt, als durch Zurückgehen um 90° oder durch Vorwärtsgehen um 270° die alten Beziehungen ändern. So heißt alſo, um bei dem vorigen Bilde zu bleiben, mit + i multipliciren, nach einander aus einem Freunde einen Neutralen, aus einem Neutralen einen Feind, aus einem Feinde einen zweiten Neutralen und aus dieſem zweiten Neutralen einen Freund machen, und mit — i multipliciren: aus einem Freunde den zweiten Neutralen, aus dieſem, der dem erſten Neutralen gegenüber ſteht, einen Feind, aus dieſem den erſten Neutralen und endlich aus dem erſten Neutralen einen Freund machen. Wenn man in dieſer Weiſe die vier Zeichen + 1, + i — 1, — i von der Quantität ſondert, wird man nie einen Fehlgriff thun, man wird z. B. finden, daß weil $\sqrt{-a^2}.\sqrt{-b^2}$ bedeutet: $i\sqrt{a^2} \times i\sqrt{b^2}$, es iſt $= -ab$ und ſich nicht durch Carnot (I. 150) und Schmelßer (I. 25) beirren laſſen, welche meinen, es gäbe nach der gewöhnlichen Regel $= +ab$. Die höhere Einheit für alles Geſagte liegt in der Formel $\cos\varphi + i \sin\varphi$, welche Cauchy den reducirten Ausdruck nennt.

Nach dieſer Darſtellung des Multiplicirens wird der Leſer ſich gewiß alle drei Löſungen in

der obigen Aufgabe ſelbſt deuten können und wir geben ihm vorläufig nur folgende Anhaltspunkte für die erſte und zweite Löſung, indem die dritte von der zweiten ſich nicht weſentlich unterſcheidet.

Erſte Löſung.	Zweite Löſung.
Es ſind: 14 Perſonen.	[− 10 − 6√5. i] Perſonen.
Es zahlt Jeder: 140 fl. = 14 fl. × 10.	[−100−60√5. i] fl. = (−10−6√5. i) fl. × 10.
Alle: 140 fl. × 14 = 1960 fl.	[−100−60√5. i] fl. × (−10−6√5. i)
oder: $98/5$ Beutel à 100 fl.	[− 8+12√5. i] Beutel.
Gewinn mit jedem Beutel: 14 + 6 = 20 fl.	[− 4− 6√5. i] fl.
Gewinn mit allen Beuteln: 20 fl. × $98/5$ = 392 fl.	[− 4−6√5. i] fl. × (−8+12√5. i) = 392 fl.

Natürlich könnte man auch die Frage gleich ſo ſtellen, daß die früherhin verworfene Antwort in den Vordergrund kommt.

Frage: Wie viel Diebe (α) und wie viel Zweideutige (β) drängten ſich zu dem Unternehmen?

Antwort. Um ſo viel als möglich unſre vorige Rechnung beibehalten zu können, wo von ehrlichen Leuten die Rede war, ſagen wir: es waren $-\alpha$ Eheliche. Dann macht ſich die Rechnung ſo:

Perſonen: $-\alpha-\beta i$.
Jeder zahlt: $-10\alpha-10\beta i$ fl.
Alle zahlen: $10(\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta i)$ fl.
oder Beutel: $\frac{-(\beta^2-\alpha^2)+2\alpha\beta i}{10}$

Gewinn à Beutel: $-(\alpha-6)-\beta i$ fl.
10facher Gewinn mit allen Beuteln:
$= \text{fl.}\,(\beta^2-\alpha^2)(\alpha-6)-2\alpha\beta(\alpha-6).i+2\alpha\beta^2 = 10.392\,\text{fl.} = c\,\text{fl.}$
$+(\beta^2-\alpha^2).\beta i.$

Da ſich am Schluſſe des Geſchäfts ein reiner Gewinn zeigt, und dabei von keinen noch ſchwebenden Summen (i) die Rede iſt, ſo folgt aus unſrer einen Gleichung zweierlei:

1) $(\beta^2-\alpha^2)(\alpha-\beta)+2\alpha\beta^2 = c.$
2) $(\beta^2-\alpha^2)\beta = 2\alpha\beta(\alpha-\beta).$

Zunächſt könnte man $\beta = 0$ ſetzen. Dies hätte zur Folge, daß
$-\alpha^3+6\alpha^2 = c$, alſo $\alpha = -14$ und $\alpha = 10 \pm 6\sqrt{5}.i$ wäre.

Das würde heißen: entweder waren 14 Perſonen, die das Gegentheil von Dieben ſind, alſo nur 14 ehrliche Leute dabei betheiligt, oder nur Diebe; da aber die Anzahl der letztern auf $10+6\sqrt{5}.i$ angegeben wird, ſo waren es doch nicht lauter Diebe, ſondern es befanden ſich unter ihnen $6\sqrt{5}$ zweideutige Perſonen.

Doch wir wollen den Fall, daß $\beta = 0$ iſt, ausſchließen, weil derſelbe uns ja nur auf die eigentliche Aufgabe zurückführen würde; dann haben wir aus 2)

$\beta^2 = 3\alpha^2 - 12\alpha$, demnach aus 1)

$2\alpha(\alpha-6)^2+6\alpha^2.(\alpha-4) = c$, oder $\alpha^3-6\alpha^2+9\alpha-490 = 0.$

Hier iſt zunächſt $\alpha = 10$, was $\beta = 6.\sqrt{5}$ ergiebt, worüber nichts weiter zu reden iſt. Aber die kubiſche Gleichung $\alpha^3 - 6\alpha^2 + 9\alpha - 490 = 0$ läßt noch zwei andre Auflöſungen zu, welche ſich aus der quadratiſchen Gleichung

$\alpha^2 + 4\alpha + 49 = 0$ ergeben, nämlich

$\alpha = -2 \pm 3\sqrt{5}.\,i$. Dies giebt

$$\beta = \sqrt{-99 \mp 72\sqrt{5}.\,i} = 3\sqrt{5}\,i \mp 12.\,i.$$

Wie iſt das zu verſtehen? Wir wollen, um keine Verwirrung hervorzubringen, zunächſt nur die obern Zeichen beachten. In unſrer urſprünglichen Annahme $x = -\alpha - \beta.\,i$ lag es ausgeſprochen, daß wir uns unter α Diebe, unter β Zweideutige dachten, welche es aus Dieben und nicht etwa aus ehrlichen Leuten geworden waren. Finden wir nun $\alpha = -2 + 3\sqrt{5}.\,i$, ſo heißt das: unter ihnen waren zunächſt 2 ehrliche Leute, die wir daher rechts hinſtellen, und $3\sqrt{5}$ Perſonen, die aus Dieben zweideutige Leute geworden waren, und die wir daher unten hinſtellen, ſo daß zunächſt links keine Diebe bleiben. Nun aber wollen wir uns die einſtweilen unten placirten Perſonen, die alle nur für Zweideutige ausgegeben wurden, näher anſehen, ihre Zahl war $\beta = 3\sqrt{5} - 12\,i$. Die $3\sqrt{5}$ Zweideutigen laſſen wir bei den andern unten ſtehen, die andern 12 aber haben nicht blos eine zweideutige Rolle geſpielt, ſie müſſen ſich wegen des bei ihnen vorgefundenen Zeichens — i gefallen laſſen, daß ſie zurücktransportirt werden, ſie ſind unzweifelhaft Diebe und finden daher paſſend links ihre Stelle. — Es hatten ſich alſo bei dem Unternehmen betheiligt: 2 ehrliche Leute, 12 Diebe und $2 \times 3\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$ Zweideutige. Da aber die abſolute Kraft und Geſchicklichkeit ſämmtlicher Intereſſenten gleich angenommen werden muß, wenn ſie auch nach verſchiedener Richtung hin wirken, ſo können wir auch, was den Effekt anbelangt, ſagen: es waren 10 Diebe und $6\sqrt{5}$ Zweideutige, wie vorhin.

12	
	2
3.	$\sqrt{5}$
3.	$\sqrt{5}$

Wir nehmen die untern Zeichen in Angriff. In dem Ausdruck $x = -\alpha - \beta\,i$ kann auch $\alpha = -2 - 3\sqrt{5}.\,i$ und $\beta = 3\sqrt{5} + 12\,i$ bedeuten. Wir muſtern zuerſt die α Perſonen, die uns als Diebe bezeichnet ſind; zwei unter ihnen wird der Leſer gewiß als ehrliche Leute erkennen und die andern wird er vom negativen Standpunkte aus in das obere Quartier der Zweideutigen zurückſchicken. Revidirt man nun die Akten in Betreff derjenigen Perſonen, welche vorläufig, weil ſie mit der Signatur $-\beta.\,i$ behaftet ſind, ſämmtlich in das unten für Zweideutige eingerichtete Quartier gebracht waren, ſo zeigt ſich bald, daß daſelbſt nur die erſten 3. $\sqrt{5}$ Individuen paſſen, die andern müſſen wegen des bei ihnen vorgefundenen Paſſes + i um einen Quadranten weiter nach rechts geſchafft werden, kurz ſie ſind auch ehrliche Leute, ſo gut wie jene 2. Da nun die Machinationen der oben und unten placirten zweideutigen Leute ſich paralyſiren, ſo bleibt nur die Thätigkeit von 14 ehrlichen Leuten übrig.

3.	$\sqrt{5}$
	12
	2
3.	$\sqrt{5}$

Wir überlaſſen es dem Leſer für $x = -\alpha + \beta\,i$ die Rechnung zu machen; er wird auf dieſelben beiden Gleichungen für α und β kommen und alſo finden, daß entweder

$\alpha = 10$, $\beta = 6.\sqrt{5}$ iſt, oder daß ſobald $\alpha = -2 \pm 3\sqrt{5}\,i$ iſt,

$\beta = 3\sqrt{5} \mp 12\,i$ wird.

Digitized by Google

Demnach wird er finden, daß auch hier

$$x = 2 \mp 3\sqrt{5}\,i$$
$$+ 3\sqrt{5}\,i \pm 12 \text{ iſt,}$$

alſo bei den obern Zeichen $x = 2 + 12 = 14$
und bei den untern Zeichen $x = 2 + 6\sqrt{5}\,i - 12 = -10 + 6\sqrt{5}\,i$.

§ 31.

Jetzt wollen wir uns an die Deutung eines der compleren Ausdrücke für α machen, etwa des von uns ſchon bevorzugten Ausdruckes $x = -10 - 6.\sqrt{5}\,i$. Hiernach betheiligten ſich bei dem Geſchäfte 10 Diebe (N) und $6.\sqrt{5}$, alſo etwa 12 Negativ-Zweideutige (Z'). [Unter einem Negativ-Zweideutigen verſtehe ich einen Menſchen, der aufgehört hat, geradezu zu ſtehlen, alſo auf dem Wege der Beſſerung ſich befindet, aber doch noch von der Ehrlichkeit ebenſo weit entfernt iſt, als von ſeiner frühern Handlungsweiſe; der Leſer wird ſich hienach ſelbſt ſagen, was er ſich unter einem Poſitiv-Zweideutigen (Z) zu denken hat.] Der Aufgabe gemäß legt Jeder, d. h. jeder ehrliche Theilnehmer (P) 10 mal ſo viel Gulden ins Geſchäft, als Theilnehmer ſind und je nachdem die Theilnehmer ſind. P legt alſo $-100 - 60.\sqrt{5}\,i$ fl. ins Geſchäft. Dieſer Ausdruck zwingt uns, die Gelder, welche ſich in der Geſellſchaftskaſſe befinden, zu klaſſificiren, wir nehmen darin unter andern Gelder oder Papiere wahr, welche der Geſellſchaft Nutzen bringen und bezeichnen einen Gulden davon mit p, ferner Papiere, welche der Geſellſchaft zum Nachtheil gereichen, ihr Zeichen iſt n, aber auch Dokumente, von denen es für den Augenblick unentſchieden iſt, ob man ſie zu den Nutzen- oder zu den Schaden-bringenden zählen ſoll, unter ihnen bemerken wir einige, welche man vor kurzem noch zu den Nutzen-bringenden würde gerechnet haben, wir möchten ſie hinſchwebende Gelder nennen und bezeichnen einen Gulden von dieſer Art mit z, andre, welche kürzlich noch zu den Schaden-bringenden gehörten, wir möchten ſie herſchwebende Gelder nennen und einen Gulden von dieſer Beſchaffenheit mit z' bezeichnen. Hiernach beſteht die Ehrlichkeit eines Einzelnen diesmal darin, $100\,n + 60.\sqrt{5}\,z'$ ins Geſchäft zu geben, oder $100\,p + 60\sqrt{5}\,z$ aus dem Geſchäft herauszunehmen (etwa vor Dieben zu retten). Natürlich wird ein Dieb das Gegentheil von dem thun, was ein Ehrlicher thäte. Jeder N wird alſo $100\,p + 60\sqrt{5}.\,z$ ins Geſchäft geben, mithin geben alle 10 N, welche ſich beim Geſchäft betheiligten, $1000\,p + 600\sqrt{5}.\,z = f$. Was aber werden die 12 Z' thun, welche wir auch beim Geſchäft erblicken? Ein N verwandelte die vier unterſchiedenen Geldſorten in ihr Gegentheil, ein Z' wird ſie durch ſeine Thätigkeit in das halbe Gegentheil verwandeln, und zwar wegen des bei ihm befindlichen Striches wird er da, wo P ein n gab, ein z geben, wo P ein z gab, ein p geben ꝛc., kurz jeder Z' wird ins Geſchäft geben $100\,z + 60\sqrt{5}.\,n$, mithin geben alle Z', deren Anzahl $6\sqrt{5}$ iſt, ins Geſchäft $600.\sqrt{5}.\,z + 1800.\,n = g$. Demnach geben alle Theilnehmer zuſammen ins Geſchäft

$f + g$, d. h.

$1000\,p + 1800\,n + 1200\sqrt{5}.\,z. = 800\,n + 1200\sqrt{5}.\,z = 100\,(8\,n + 12\sqrt{5}.\,z)$
(weil $1000\,p + 1000\,n = 0$ iſt wegen des totalen Gegenſatzes zwiſchen p und n), alſo 8 Beutel, angefüllt mit n's und $12\sqrt{5}$ Beutel, angefüllt mit z's, oder $8.\,\nu + 12\sqrt{5}.\,\zeta$, wobei

die griechiſchen Buchſtaben einen Beutel bedeuten ſollen, angefüllt mit 100 Species der Art, welche der nämliche lateiniſche Buchſtabe bezeichnet.

Nun beträgt der Gewinn bei dieſem Geſchäft 6 p.C. mehr als Perſonen, und zwar ehrliche dabei thätig ſind; d. h. mit jedem Beutel, angefüllt mit 100 p, den man ins Geſchäft giebt, kurz mit jedem π verdient die Geſellſchaft $-4 - 6\sqrt{5}\,i$ fl. $= 4.\,n + 6\sqrt{5}.\,z'$. Natürlich wird mit jedem in die Kaſſe gelegten ν das Gegentheil und mit jedem ζ das poſitive halbe Gegentheil verdient werden. Unter dem poſitiven halben Gegentheil verſtehen wir hier: während mit einem π ein p verdient wird, ſoll mit einem ζ ein z verdient werden, und während mit einem π ein z verdient wird, ſoll mit einem ζ ein n verdient werden, und ſo in der poſitiven Richtung fort. Das Gegentheil von $4.\,n + 6.\sqrt{5}.\,z'$ iſt aber $4\,p + 6\sqrt{5}.\,z$ und das poſitive halbe Gegentheil von $4\,n + 6\sqrt{5}.\,z'$ iſt $4\,z' + 6.\sqrt{5}.\,p$. Mithin beträgt der Gewinn mit jenen 8. ν offenbar $32\,p + 48.\sqrt{5}.\,z = F$,

und mit jenen $12.\sqrt{5}.\,\zeta$ gewiß $360\,p + 48\sqrt{5}.\,z' = G$.

Die ganze Geſellſchaft gewinnt alſo im Ganzen F + G, d. h.

$$392.\,p + 48\sqrt{5}.\,z + 48\sqrt{5}.\,z' = 392.\,p = 392 \text{ fl.},$$

weil wegen des totalen Gegenſatzes zwiſchen z und z' naturgemäß

$$48.\sqrt{5}.\,z + 48.\sqrt{5}.\,z' = 0 \text{ iſt.}$$

Der Uebung wegen empfehlen wir dem Leſer ähnliche Betrachtungen bei folgender, etwas veränderten Aufgabe anzuſtellen:

Aufgabe. Einige Perſonen, welche entweder P oder N oder Z oder Z' waren, treten in Verbindung, Jeder giebt 10 mal ſo viel Thaler ins Geſchäft als Perſonen ſind und je nachdem die Perſonen ſind. Sie gewinnen damit 6 p.C. weniger als Perſonen ſind, wobei ſowohl die Beſchaffenheit der Perſonen als der Einlagen gehörig zu berückſichtigen iſt. Das Ergebniß ſämmtlicher Operationen war ein Verluſt von 392 rtl. Wie viel Perſonen von jeder Art waren?

Antwort. Aus $x^3 - 6\,x^2 = -3920$ folgt nun

$$x = -14 \text{ oder } x = 10 \pm 6.\sqrt{5}\,i.$$

Einige Anhaltspunkte wegen der Deutung.

	Erſte Löſung.	Zweite Löſung.	Dritte Löſung.
Perſonen.	-14	$10 + 6.\sqrt{5}.\,i$	$10 - 6.\sqrt{5}.\,i$
Jeder zahlt . . .	— 140 rtl.	$100 + 60.\sqrt{5}.\,i$	$100 - 60.\sqrt{5}.\,i$
Alle	$+ 14^2 . 10$ rtl.	$-800 + 1200.\sqrt{5}.\,i$	$-800 - 1200.\sqrt{5}.\,i$
oder Beutel à 100 rtl.	$196/10$	$-8 + 12\sqrt{5}.\,i$	$-8 - 12.\sqrt{5}.\,i$
Gewinn à Beutel .	— 20 rtl.	$4 + 6.\sqrt{5}.\,i$	$4 - 6.\sqrt{5}.\,i$
Gewinn mit allen B.	— 392 rtl.	— 392	— 392

§ 32.

27ſte Aufgabe. Drei Armeekorps A, B und C werden ins Feld geſchickt und ſind auf 36 Wochen mit Lebensmitteln verſehen. Mit dieſem Proviant würde das Korps A 24 Wochen länger als B, B aber 40 Wochen länger als C auskommen. Wie viel mal iſt das zweite (x) und dritte (y) Korps ſtärker als das erſte?

Digitized by Google

Auflö ung. Aus den Gleichungen $(1 + x + y).\ 36 = \frac{(1 + x + y)}{x}.\ 36 + 24$

und $\frac{(1 + x + y)}{x}.\ 36 = \frac{(1 + x + y)}{y}.\ 36 + 40$

folgt $y = \frac{3 + 2x - 3x^2}{3.\ (x - 1)}$, oder auf einem andern Wege $y = \frac{3x}{8 - 5x}$. Durch einen dieser Werthe von y geht eine der beiden ersten Gleichungen in folgende über:

$$x^3 - 43/15\ x^2 + 2/3\ x + 8/5 = 0,$$

aus welcher sich ergiebt $x = 1\frac{1}{5}$, $x' = \frac{5 + \sqrt{73}}{6}$, $x'' = \frac{5 - \sqrt{73}}{6}$,

hienach ist ferner $y = 1\frac{1}{5}$, $y' = -\frac{10 + \sqrt{73}}{9}$, $y'' = -\frac{10 - \sqrt{73}}{9}$.

Erste Lösung. Um Brüche zu vermeiden, sagen wir, das erste Korps A habe aus 5, das zweite aus 6, das dritte aus 9 Regimentern bestanden; dann würde ein Regiment mit dem Vorrath 720 Wochen reichen, das erste Korps 144, das zweite 120, das dritte 80 Wochen.

Zweite Lösung. Auch hier möge das erste Korps aus 18, das zweite aus 15 + 3. $\sqrt{73} = 41$ (circa) Regimentern bestanden haben, dann soll das dritte Korps C — 20 — 2 $\sqrt{73} = -37$ (circa) Regimenter gehabt haben. Demnach würde A 26 + 2 $\sqrt{73} = 44$ (c.), B 2 + 2 $\sqrt{73} = 19$ (c.), C — 38 + 2 $\sqrt{73} = -21$ (c.) Wochen mit dem Proviant ausgekommen sein. Aber wie, die **37** negativen Regimenter, die man für weniger als Nichts anzusehen pflegt, sollten 40 Wochen weniger auskommen als die **41** positiven Regimenter? Das kann unmöglich unsre Meinung sein. Um über diese Schwierigkeit hinwegzukommen, legen wir uns die Frage vor: Was haben wir unsrer Aufgabe gemäß unter einem positiven Regiment zu verstehen? Offenbar ein Regiment, welches im Lager vorhandene Lebensmittel verzehrt und zwar sämmtliche Vorräthe in einer bestimmten Zeit. Nun kann es nicht schwer werden, zu sagen, was ein negatives Regiment ist? Es verzehrt aus dem im Lager befindlichen Vorrathe nichts, im Gegentheil, es ernährt sich selber und schafft in derselben Zeit so viel Vorräthe in's Lager, als das positive Regiment braucht. Jetzt wird es auch klar sein, was wir darunter zu verstehen haben, daß die **37** negativen Regimenter — **21** Wochen brauchen, um die Vorräthe zu verzehren. Es kann offenbar nichts anders bedeuten, als daß sie die Eigenschaft haben, gewisse Räume in **21** Wochen mit Lebensmitteln anzufüllen. Da aber das Auffüllen eines Magazins immer als das Gegentheil von dem Leermachen desselben angesehen werden kann, und da das zweite Korps es in **19** Wochen, das dritte also wirklich in — **21** Wochen ausgeleert hat, so möge man immerhin nach algebraischem Sprachgebrauch sagen, daß B zu dem Ausleeren 40 Wochen mehr gebraucht hat als C; wir wissen, daß das keinen andern Sinn haben kann, als folgenden: die Zeit, welche C gebraucht hat, um das Magazin mit Lebensmitteln anzufüllen und die Zeit, welche B gebraucht hat, diese Lebensmittel zu verzehren, machen zusammen 40 Wochen aus. Wir würden also, der zweiten Lösung zu gefallen, die Aufgabe so zu stellen haben:

In einer Festung befinden sich zwei Korps proviantverzehrende Soldaten A und B und ein Korps proviantverschaffende Soldaten C. Als sie einrückten, fanden sie die Magazine gefüllt, aber

nach 36 Wochen waren sie leer. Da zogen A und B aus, und als C die Magazine wieder gefüllt hatte, verließ es auch die Festung; dagegen rückte B ein, und als der Vorrath wieder verzehrt war, waren von dem Augenblicke an gerechnet, wo die neue Anfüllung begann, 40 Wochen verflossen. Wäre statt B das Korps A eingerückt, so hätte es 24 Wochen länger mit dem Proviant gereicht als B damit reichte. Wie viel mal stärker (x) ist B als A, und wie viel mal (y) ist C stärker als A?

Aus den Gleichungen $(1 + x - y).\ 36 = \frac{(1 + x - y)}{x}.\ 36 + 24$,

$$\frac{(1 + x - y).\ 36}{x} + \frac{(1 + x - y)}{y}.\ 36 = 40$$

folgt jetzt $y = \frac{3x}{5x - 8}$ und wieder $x^3 - \frac{43}{15} x^2 + \frac{2}{3} x + \frac{8}{5} = 0$.

Demnach ist wieder $x = 1\frac{1}{5}$, $x' = \frac{5 + \sqrt{73}}{6}$, $x'' = \frac{5 - \sqrt{73}}{6}$,

aber $y = -1\frac{1}{5}$, $y' = \frac{10 + \sqrt{73}}{9}$, $y'' = \frac{10 - \sqrt{73}}{9}$.

Dritte Lösung der Hauptaufgabe. Ein Jeder wird sich nun selbst sagen können, daß man die allgemeine Aufgabe folgender Maßen umzuschreiben und zu specialisiren hat, wenn die obige dritte Lösung $\left(x'' = \frac{5 - \sqrt{73}}{6},\ y'' = -\frac{10 - \sqrt{73}}{9} \right)$ vor den beiden andern den Vorrang gewinnen soll.

In eine Festung, deren Magazine mit Lebensmitteln angefüllt sind, rückt ein verzehrendes Korps A und zwei ernährende Korps (Fouragirer) B und C ein. Nichts desto weniger war nach 36 Wochen aller Vorrath aufgezehrt. Da rückten A und C aus und B füllte von neuem die Magazine. Als B damit fertig war, räumte es den Platz dem Korps A, und als nun abermals aller Proviant verzehrt war, waren seit der Zeit, da die letzte Füllung begann, 24 Wochen verflossen. Auch ist bekannt, daß C zur Anfüllung der Magazine 40 Wochen mehr gebraucht haben würde als B. Wie viel mal stärker ist B als A und C als A?

Nehmen wir wieder an, daß A aus 18 Regimentern (Verzehrern) bestand, so hatte B $3\sqrt{73} - 15$ und C $20 - 2\sqrt{73}$ Regimenter (Ernährer). Als alle drei Korps in der Festung waren, durften nur $13 - \sqrt{73}$ Regimenter aus den gefüllten Magazinen Proviant erhalten, mithin würde ein Regiment Verzehrer $(13 - \sqrt{73})$. 36 Wochen mit dem Vorrath gereicht haben, so wie andrerseits ein Regiment Ernährer eben so viel Wochen gebraucht hätte, das Magazin zu füllen. Folglich wurde A mit der Verzehrung des Vorrathes in $26 - 2\sqrt{73}$ Wochen fertig, dagegen hatte B mit der Herbeischaffung desselben $2\sqrt{73} - 2$ Wochen und C $2\sqrt{73} + 38$ Wochen zu thun.

In so fern es also zu jedem Dinge oder vielmehr zu dessen gerade in Betracht kommender Eigenschaft andre Dinge giebt, welche die entgegengesetzte oder halbentgegengesetzte Beschaffenheit haben, in so fern wird man auch stets die negativen und imaginären Auflösungen der betreffenden Probleme zu denten im Stande sein.

Wedelsche Hofbuchdruckerei.

SBN 679800